

## FICHE TP 10 : VOCABULAIRE SUR LES GRAPHS

### Définition 1 : Premières définitions sur les graphes

- ★ On appelle **graphe** la donnée d'un ensemble  $\mathcal{S}$  de points appelés **sommets** et d'un ensemble de lignes  $\mathcal{A}$  appelées **arêtes** qui relient certains sommets entre eux (une partie de  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  en pratique) :

$$\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A}).$$

- ★ Le nombre de sommets d'un graphe s'appelle l'**ordre** du graphe.
- ★ Deux sommets reliés entre eux par une arête sont dits **adjacents**. Autrement dit,  $s_1$  et  $s_2$  sont adjacents si

$$(s_1, s_2) \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad (s_2, s_1) \in \mathcal{A}.$$

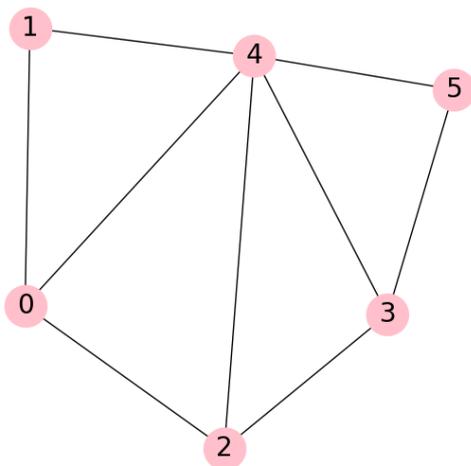
- ★ Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes issues de ce sommet.
- ★ Un sommet qui n'est adjacent à aucun autre sommet est dit **isolé**.
- ★ Un graphe est dit **complet** si deux sommets quelconque distincts sont toujours adjacents.
- ★ Dans un **graphe non orienté**, chaque arête peut être parcourue dans les deux sens. Autrement dit,

$$\forall (s_1, s_2) \in \mathcal{A}, \quad (s_2, s_1) \in \mathcal{A}.$$

- ★ Dans un **graphe orienté**, chaque arête peut être parcourue dans un seul sens indiqué par une flèche.

Exemple :

On considère le graphe non orienté suivant. On le notera  $\mathcal{G}$  dans la suite de cette fiche.



- (i) Quel est le degré du sommet 0 ?

3 .....

- (ii) Quels sont les sommets adjacents au sommet 0 ?

1, 2, 4 .....

- (iii) Le graphe est-il complet ? Justifier.

Non, car par exemple 0 n'est pas relié à 3

**Remarque : Boucle et graphe multi-arêtes.**

- ★ Un graphe, orienté ou non, peut contenir des **boucles** c'est-à-dire une arête dont l'origine et l'extrémité correspondent au même sommet.
- ★ Il peut aussi être **multi-arêtes** dans le sens où deux sommets distincts peuvent être reliés par des arêtes différentes.

Néanmoins, les graphes que nous étudierons cette année seront **simples** dans le sens où ils ne présenteront ni boucle, ni arête multiple.

## Implémenter un graphe à l'aide d'un dictionnaire

- ★ la clé correspond à un sommet,
- ★ la valeur associée à la clé est la liste des sommets adjacents.

Pour implémenter  $\mathcal{G}$ , on écrit :

```
G = {}
G[0] = [1,2,4] ..... On crée le sommet 0 et les arêtes 0 → 1, 0 → 2, 0 → 4

G[1] = [0,4] .....

G[2] = [0,3,4] .....

G[3] = [2,4,5] .....

G[4] = [0,1,2,3,5] .....

G[5] = [3,4] .....
```

## Implémenter un graphe à l'aide d'une liste d'adjacence

- ★ on numérote les  $n$  sommets de 0 à  $n - 1$ ,
- ★ la valeur dans la liste d'adjacence à la position  $i$  est la liste des sommets adjacents au sommet numéro  $i$ .

Pour implémenter  $\mathcal{G}$ , on écrit :

```
LG = ..... [[1,2,4], [0,4], [0,3,4], [2,4,5], [0,1,2,3,5], [3,4]]
```

## Définition 2 : Matrice d'adjacence

Soit  $\mathcal{G}$  un graphe simple non pondéré d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ . On numérote ses sommets de 1 à  $n$ . On appelle **matrice d'adjacence** associée au graphe  $\mathcal{G}$  la matrice dont le terme  $a_{ij}$  (pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ) vaut 1 s'il existe une arête permettant d'aller du sommet  $i$  vers le sommet  $j$  et 0 sinon.

**Remarque :** Dans le cas d'un graphe non orienté, pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , les coefficients  $a_{ij}$  et  $a_{ji}$  sont égaux. En revanche dans le cas d'un graphe orienté, la matrice d'adjacence n'est a priori pas symétrique.

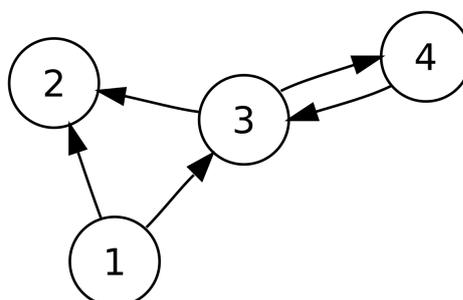
*Exemple :* La matrice adjacente associée au graphe  $\mathcal{G}$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Exemple :*

On considère le graphe orienté  $\mathcal{G}_o$  ci-contre.  
Sa matrice d'adjacence est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



## Matrice d'adjacence en langage Python

On rappelle qu'il est possible de définir des matrices grâce au module `numpy`.

L'instruction `np.zeros((n,n))` permet notamment de définir une matrice nulle de taille  $n$  (matrice que l'on peut ensuite modifier pour remplacer les 0 par des 1 aux positions où cela est opportun).

### Définition 3 : Chemin entre deux sommets, graphe connexe

Soit  $\mathcal{G}$  un graphe non pondéré.

- ★ On appelle **chemin** ou **chaîne** sur  $\mathcal{G}$  toute suite ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.
- ★ La **longueur** d'un chemin sur un graphe non pondéré est le nombre d'arêtes qu'il comporte.
- ★ Un graphe est dit **connexe** si quels que soient les sommets  $s_i$  et  $s_j$ , il existe toujours un chemin reliant  $s_i$  à  $s_j$ .

*Exemple* : Sur le graphe  $\mathcal{G}$ , donner :

(i) Un chemin reliant 0 à 5 :  $0 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  .....

(ii) Un chemin de longueur 4 reliant 0 à 5 :  $0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  .....

*Exemple* : Le graphe  $\mathcal{G}$  est connexe. Dessiner un graphe non connexe :

### Théorème 1 : Nombre de chemins de longueur $k$

Soit  $A$  la matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  dont les sommets sont numérotés de 1 à  $n$ , soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  et soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Le terme  $m_{ij}$  de la matrice  $A^k$  est égal au nombre de chemins de longueur  $k$  reliant les sommets  $i$  et  $j$  dans ce graphe.

▼ *Démonstration* : Ce résultat se démontre par récurrence sur  $k$ .

*Exemple* : On donne, en notant  $A$  la matrice d'adjacence du graphe  $\mathcal{G}$ , la matrice

$$A^4 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 16 & 19 & 24 & 12 \\ 12 & 12 & 16 & 12 & 16 & 11 \\ 16 & 16 & 23 & 16 & 24 & 16 \\ 19 & 12 & 16 & 20 & 24 & 12 \\ 24 & 16 & 24 & 24 & 39 & 16 \\ 12 & 11 & 16 & 12 & 16 & 12 \end{pmatrix}.$$

(i) Combien y a-t-il de chemins de longueur 4 reliant 0 à 5?  $12$  .....

(ii) Entre quels sommets distincts existe-il le plus de chemins de longueur 4?

Il y a 24 chemins de longueur 4 différents reliant : 0 et 4 ou 2 et 4 ou 3 et 4. ....