# Devoir maison n°5
## à rendre le Lundi 08/01/2024

### Consignes

- Les devoirs maison sont facultatifs. Pour autant, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.**

## Exercice 1 | Calcul d'une intégrale Solution

Soit $a > 0$. Démontrer que :

$$\mathrm{I}(a) = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0,$$

à l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$.

## Exercice 2 | Changement de fonction inconnue Solution

On souhaite déterminer les fonctions dérivables et qui ne s'annulent pas sur $]0,+\infty[$ et vérifiant le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' + \frac{1}{x}y &=& -y^2\ln x \\ y(1) &=& 1. \end{array}\right. \qquad (\star)$$

**1.** Soit $y : ]0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et ne s'annulant pas, une solution de $(\star)$. On définit alors la fonction $z : ]0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad z(x) = \frac{1}{y(x)}.$$

**1.1)** Montrer que $z$ est solution de l'équation différentielle : **(E)** $z' - \dfrac{1}{x}z = \ln x$.

**1.2)** Résoudre **(E)** sur $]0,+\infty[$.

**2.** En déduire la résolution complète de $(\star)$ sur $]0,+\infty[$.

## Problème 1 | Nombres de Catalan.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on appelle $2n$-*parenthésage* toute succession de $2n$ caractères qui peuvent être soit une parenthèse ouvrante `"("`, soit une parenthèse fermante `")"`. Un $2n$-parenthésage est dit « légal » lorsque :

**(Condition 1)** Il possède $n$ parenthèses ouvrantes et $n$ parenthèses fermantes.

**(Condition 2)** Lorsque l'on lit le parenthésage de la gauche vers la droite, à aucun moment de la lecture on n'a croisé strictement plus de parenthèses fermantes que de parenthèses ouvrantes (autrement dit, toute parenthèse fermante ferme une parenthèse ouvrante qui n'avait pas encore été fermée).

***Quelques exemples :***

- Pour $n = 3$, sont légaux : `"()()()"`, `"(())()"`, `"((()))"`, *etc.*
- Ne sont pas légaux (respectent la **Condition 1** mais pas la **Condition 2** :

  `"())(()"`, `"(()))("`, `")(())("`.

  Par exemple, `"())(()"` n'est pas légal car après avoir lu trois caractères `())`, on a rencontré strictement plus de parenthèses fermantes que de parenthèses ouvrantes.
- Ne sont pas légaux (ne respectent même pas la **Condition 1**) :

  `"(((((("`, `"(())(("`, `")))))("`.

**1.** Combien existe-t-il de $2n$-parenthésages ? *(on s'intéresse à tous les parenthésages possibles ici, y compris ceux qui ne sont pas légaux).*

**2.** Combien existe-t-il de $2n$-parenthésages qui vérifient la **Condition 1** ci-dessus (mais pas forcément la **Condition 2**) ?

**3.** Écrire une fonction `est_legal(s)` qui prend en argument une chaine de caractères (de type `str`), et qui renvoie `True` si `s` est une succession légale de parenthèses, et `False` sinon.
Pour construire le code, on pourra utiliser une variable évoluant de la manière suivante :
- On initialise une variable $p$ à 0,
- On lit les caractères uns par uns,
- À chaque parenthèse ouvrante on augmente $p$ de 1, à chaque parenthèse fermante on diminue $p$ de 1. Ainsi, $p$ compte le nombre de parenthèses qui ont été ouvertes mais n'ont pas été refermées jusque là.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse aux parenthésages légaux. Pour $n \geqslant 1$, on note $\mathrm{C}_n$ le nombre de $2n$-parenthésages légaux. Le nombre $\mathrm{C}_n$ est appelé *$n$-ième nombre de Catalan.*

On a notamment $\mathrm{C}_1 = 1$ avec le seul mot `"()"`, $\mathrm{C}_2 = 2$ (les mots `"()()"` et `"(())"`). On considère que $\mathrm{C}_0 = 1$.

**4.** Vérifier que $\mathrm{C}_3 = 5$ en donnant les 5 mots bien parenthésés.

**5.** Justifier que les nombres de Catalan vérifient la relation de récurrence :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \times C_{n-1-k}.$$

*On pourra, par exemple, discuter selon le numéro de la parenthèse fermante qui ferme la toute première parenthèse ouvrante.*

**6.** En déduire la valeur de $C_4$.

**7.** Ecrire une fonction itéartive `catalan(n)` qui prend en entrée un entier naturel $n$ et renvoie la liste $[C_0, C_1, \dots, C_n]$. Les $C_i$ doivent être calculés de proches en proches à l'aide de la formule donnée à la question **5**.

## CORRECTION

**Solution (exercice 1)** Énoncé La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\begin{cases}\left[\dfrac{1}{a}, a\right] & \text{si } a \geqslant 1\\ \left[a, \dfrac{1}{a}\right] & \text{si } 0 < a < 1\end{cases}$, par changement de variable :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a) &= \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{-\ln(t)}{t^2+1}(-\,\mathrm{d}t)\\ &= \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\ &= -\mathrm{I}(a).\end{aligned}$$

Ayant $\mathrm{I}(a) = -\mathrm{I}(a)$, on obtient $2\mathrm{I}(a) = 0$, d'où : $\boxed{\mathrm{I}(a) = 0}$

**Solution (exercice 2)** Énoncé

**1. 1.1)** Puisque $y$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ alors $z = \dfrac{1}{y}$ est correctement définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, puisque $y$ est solution de $(\star)$, alors $y$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc $z$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x) = -\dfrac{y'(x)}{y^2(x)}$.

Supposons $y$ solution de (S) sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = -y^2(x)\ln x$$

donc : $\quad -\dfrac{y'(x)}{y^2(x)} - \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{y(x)} = \ln x \quad$ car: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) \neq 0$

puis : $\quad z'(x) - \dfrac{1}{x}z(x) = \ln x$

ainsi : $\boxed{z \text{ est solution de } \mathbf{(E)} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

**1.2)** **Résolution de l'homogène.** L'équation homogène associée à **(E)** est

$$\mathbf{(H)}: \ z' = \frac{1}{x}z.$$

Les solutions de **(H)** sont les fonctions $z_h$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$z_h(x) = \lambda \mathrm{e}^{\ln|x|} = \lambda x,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Recherche d'une solution particulière.** Cherchons une solution particulière $z_p$ de **(E)** sous la forme $z_p(x) = \lambda(x)x$ où $\lambda$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, $z_p$ est solution de **(E)** si et seulement si :

$$\begin{aligned} z_p'(x) - \frac{1}{x}z_p(x) = \ln(x) &\iff \lambda'(x)x + \lambda(x) - \lambda(x) = \ln(x)\\ &\iff \lambda'(x)x = \ln(x)\\ &\iff \lambda'(x) = \frac{1}{x}\ln(x).\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ convient et on obtient : $\quad z_p(x) = \dfrac{1}{2}x(\ln x)^2$.

Finalement, les solutions, de **(E)** sont les fonctions $z$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\boxed{z(x) = \lambda x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}}$$

**2.** De ce qui précède, si $y$ est solution de $(\star)$, alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\lambda x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2}.$$

De plus, comme $y(1) = 1$, on déduit $\lambda = 1$ et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad y(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2}.$$

Inversement, notons $f$ la fonction ci-dessus et montrons qu'elle est bien solution de $(\star)$.

La fonction $f$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes généraux et $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $f(1) = 1$ car $\ln 1 = 0$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = -\frac{1 + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x}{\left(x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2\right)^2}$$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) + \frac{1}{x}f(x) &= -\frac{1 + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x}{\left(x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2\right)^2} + \frac{1}{x\left(x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2\right)}\\ &= \frac{x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - x\left(1 + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x\right)}{x\left(x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2\right)^2}\\ &= -\frac{x\ln x}{x\left(x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2\right)^2}\\ &= -\ln x\left(\frac{1}{x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2}\right)^2\\ &= -f^2(x) \times \ln x.\end{aligned}$$

Donc $f$ est bien solution de $(\star)$. Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution de } (\star) \text{ est } f}$.

**Solution (problème 1)** Énoncé

1. Choisir un $2n$-parenthésage, c'est choisir pour chacun des caractères s'il s'agit d'une parenthèse ouvrante ou fermante. Il y a donc un total de $\boxed{2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^{2n} \text{ choix possibles}}$.
2. Choisir un $2n$-parenthésage qui vérifie la **Condition 1**, c'est choisir la position des $n$ parenthèses ouvrantes parmi les $2n$ parenthèses (les $n$ parenthèses fermantes se disposant alors dans les places restantes). Il y a donc $\boxed{\binom{2n}{n} \text{ tels parenthésages}}$.
3. 
```python
def est_legal(s):
    # compte les parenthèses ouvertes et non refermées \
    ↪ jusque là
    p = 0
    for i in range(len(s)):
        if s[i] == "(":
            # une parenthèse ouverte de plus
            p = p + 1
        elif s[i] == ")":
            if p >= 1:
                # il y a plus de parenthèses ouvertes que \
                ↪ fermées jusque là et on en referme une
                p = p - 1
            else:
                # sinon il y a un problème
                return False
    # renvoie True si p vaut bien 0 à la fin, et False sinon
    return p == 0
```
4. Les 5 chaînes de caractère bien parenthésées sont :

   `"()()()"` , `"(())()"` , `"()(())"` , `"((()))"` , `"(()())"`

5. Il est important de se représenter, au préalable, un mot de Catalan d'une taille assez-grande (par exemple avec 20 parenthèses) pour bien comprendre le raisonnement qui suit.
   Soit $n \geqslant 1$. Suivons le conseil de l'énoncé, et notons $k$ le numéro de la parenthèse fermante qui ferme la toute première parenthèse ouvrante. Un $2n$-parenthésage légal est alors de la forme suivante :
   $$(\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{2(k-1)\text{ parenthèses}})\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{2(n-k)\text{ parenthèses}}$$
   Choisir un tel parenthésage, c'est donc :
   - Choisir la disposition du premier bloc de $2(k-1)$ parenthèses. Ce bloc forme un $2(k-1)$-parenthésage légal, il y a donc $C_{k-1}$ choix possibles.
   - PUIS choisir la disposition du second bloc de $2(n-k)$ parenthèses. Ce bloc forme un $2(n-k)$ parenthésage légal, il y a donc $C_{n-k}$ choix possibles.

   En sommant selon toutes les valeurs possibles de $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient donc :
   $$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \times C_{n-k}$$
   puis, après changement d'indice :
   $$\boxed{C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \times C_{n-k-1}}$$
6. D'après la question précédente,
   $$\begin{aligned} C_4 &= \sum_{k=0}^{3} C_k \times C_{3-k} \\ &= C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 \\ &= 2(C_0C_3 + C_1C_2) \\ &= 2(1 \times 5 + 1 \times 2) \\ &= 2 \times 7 \\ &= \boxed{14} \end{aligned}$$
7. 
```python
def catalan(n):
    L=[1]
    for i in range(1, n):
        # ici : calcul d'une certaine somme des termes de \
        ↪ la suite
        S = 0
        for k in range(0, i):
            S = S + L[k] * L[i-1-k]
        L.append(S)
    return L
```