Devoir maison n°7
à rendre le Lundi 04/03/2024

Consignes

- Les devoirs maison sont facultatifs. Pour autant, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.**

Exercice 1 | Suites implicites, équivalents. Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$(\mathrm{E}_n): \quad x + \mathrm{e}^{nx} = 2.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{nx} - 2.$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution, que l'on note x_n, dans $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, $x_n + \mathrm{e}^{nx_n} = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. **2.1)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$.
En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$ puis la monotonie de la suite (x_n).
2.2) Montrer que la suite (x_n) converge. On notera ℓ sa limite.
2.3) Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que $\ell = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nx_n = \ln(2 - x_n)$. En déduire que :
$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}.$$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\varepsilon_n = x_n - \dfrac{\ln(2)}{n}$.
Montrer que $\quad \varepsilon_n = \dfrac{\ln\left(1 - \dfrac{x_n}{2}\right)}{n} \quad$ et en déduire que :
$$\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^\beta},$$
avec α et β deux réels à déterminer.

Exercice 2 | Un système linéaire à paramètre. Solution

Résoudre suivant les valeurs du réel λ le système :

$$(\mathrm{S}): \begin{cases} -\lambda x & & + & z & = 0 \\ -3x & + (3-\lambda)y & + & z & = 0 \\ -3x & + y & + & (3-\lambda)z & = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 | Matrice dépendant d'un paramètre. Solution

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose : $\mathrm{M}_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice M_a est inversible. Calculer l'inverse lorsque $a = 0$.
2. À l'aide de la question précédente, résoudre le système : $\begin{cases} y + z = -2 \\ x + z = 1 \\ x + y = 5. \end{cases}$

CORRECTION

Solution (exercice 1) [Énoncé]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : x \mapsto x + e^{nx} - 2$ est définie, $\boxed{\text{continue}}$ et dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= 1 + n\mathrm{e}^{nx} \\ &> 1 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi f est $\boxed{\text{strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$.
Enfin $\boxed{f_n(0) = -1}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$.
D'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle $[-1, +\infty[$. Enfin $0 \in [-1, +\infty[$ donc :

$$\boxed{\text{L'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution, notée } x_n, \text{ dans } \mathbb{R}_+}$$

2. **2.1)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x + \mathrm{e}^{(n+1)x} - 2 - x - \mathrm{e}^{nx} + 2 \\ &= \mathrm{e}^{(n+1)x} - \mathrm{e}^{nx} \\ &= \mathrm{e}^{nx}(\mathrm{e}^x - 1) \end{aligned}$$

Puisque $x \geq 0$, on a $e^x \geq e^0$ (par croissance de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}_+$) donc $\mathrm{e}^x \geq 1$ et donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$.
Ainsi :

$$f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) \geq 0 \iff f_{n+1}(x_n) \geq f_n(x_n).$$

Or, $f_n(x_n) = 0$, donc : $f_{n+1}(x_n) \geq 0$, mais on a aussi $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, donc : $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$ ce qui est équivalent, f_{n+1} étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, à $x_n \geq x_{n+1}$. $\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est donc décroissante.}}$

x	0	x_{n+1}	x_n	$+\infty$
$f_{n+1}(x)$	-1 ↗	0 ↗	$f_{n+1}(x_n)$ ↗	$+\infty$

2.2) La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. Si on note ℓ sa limite, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \ell \leq x_n \leq x_0$.

2.3) Par définition de la suite (x_n), on a $e^{nx_n} + x_n = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soit : $\lim_{n\to+\infty} (e^{nx_n} + x_n) = 2$.

Si $\ell > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} nx_n = +\infty$ (par produit de limites) soit, par somme et composition de limites : $\lim_{n\to+\infty} e^{nx_n} + x_n = +\infty$, ce qui est absurde.
Puisque $\ell \geq 0$ (cf question précédente), on a nécessairement $\boxed{\ell = 0}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a par définition de la suite (x_n) :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{nx_n} + x_n = 2 &\iff \mathrm{e}^{nx_n} = 2 - x_n \\ &\iff \boxed{nx_n = \ln(2 - x_n)} \quad \text{car } 2 - x_n = \mathrm{e}^{nx_n} > 0 \\ &\iff x_n = \frac{1}{n}\ln(2 - x_n). \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, on a par composition de limites : $\lim_{n\to+\infty} \ln(2 - x_n) = \ln 2$ avec $\ln 2 \neq 0$.
On en déduit que : $\ln(2 - x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln 2$.

On en déduit par produit que : $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= x_n - \frac{\ln(2)}{n} \\ &= \frac{1}{n}\ln(2 - x_n) - \frac{\ln(2)}{n} \\ &= \frac{\ln(2 - x_n) - \ln(2)}{n} \\ &= \frac{\ln\left(1 - \frac{x_n}{2}\right)}{n} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{x_n}{2}\right) = 0$ on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{x_n}{2}\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x_n}{2} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln(2)}{2n}, \end{aligned}$$

soit, par produit : $\varepsilon_n \sim \dfrac{-\ln(2)}{2n^2}$

$$\boxed{\text{On a bien } \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^\beta} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{-\ln(2)}{2} \quad \text{et} \quad \beta = 2.}$$

Solution (exercice 2) [Énoncé]

$$(S) \iff \begin{cases} -3x + (3-\lambda)y + z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ -\lambda x + z = 0 \\ -3x + y + (3-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x + (3-\lambda)y + z = 0 \\ -\lambda(3-\lambda)y + (3-\lambda)z = 0 & L_2 \leftarrow 3L_2 - \lambda L_1 \\ (\lambda-2)y + (2-\lambda)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

On distingue alors plusieurs cas.

- **[1er cas.]** Si $\lambda = 2$, la dernière ligne du système donne $0 = 0$. On a ainsi :

$$(S) \iff \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{y+z}{3} = y \\ z = 2y \end{cases}$$

D'où : $\boxed{\mathscr{S} = \{(y, y, 2y),\ y \in \mathbb{R}\}}$

- **[2nd cas.]** Si $\lambda \neq 2$, on peut diviser la dernière ligne du système par $\lambda - 2 \neq 0$. Ainsi :

$$(S) \iff \begin{cases} -3x + (3-\lambda)y + z = 0 \\ -\lambda(3-\lambda)y + (3-\lambda)z = 0 \\ y - z = 0 & L_3 \leftarrow \dfrac{1}{\lambda-2}L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x + (3-\lambda)y + z = 0 \\ y - z = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -\lambda(3-\lambda)y + (3-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x + (3-\lambda)y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ (3-\lambda)(1-\lambda)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + \lambda(3-\lambda)L_2 \end{cases}$$

1er sous-cas. Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$ (donc $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ puisque $\lambda \neq 2$, le système est de Cramer. En divisant la dernière ligne du système par $(3-\lambda)(1-\lambda)$, on trouve $z = 0$ puis en remontant le système, on obtient : $y = 0$ puis $x = 0$. D'où : $\boxed{\mathscr{S} = \{(0,0,0)\}}$.

2ème sous-cas. Si $\lambda = 1$, le système donne :

$$(S) \iff \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff x = y = z.$$

D'où : $\boxed{\mathscr{S} = \{(x, x, x),\ x \in \mathbb{R}\}}$

3ème sous-cas. Si $\lambda = 3$, le système devient :

$$(S) \iff \begin{cases} -3x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff z = 3x = y.$$

D'où : $\boxed{\mathscr{S} = \{(x, 3x, 3x),\ x \in \mathbb{R}\}}$

Solution (exercice 3) [Énoncé]

1. Dans le but de calculer ensuite l'inverse, on amorce la méthode du miroir.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1 & 0 & -a \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1 & 1 & -(a+1) \end{array}\right) \quad L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2$$

Or, $2 - a - a^2 = 0 \iff a \in \{1, -2\}$. On déduit alors que M_a est inversible si et seulement si : $\boxed{a \notin \{1, -2\}}$.

Ainsi, la matrice est donc bien inversible lorsque $a = 0$, on poursuit alors la méthode du miroir.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1 & 1 & -(a+1) \end{array}\right)$$

$$\overset{a=0}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Donc : $\boxed{M_0^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

2. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors le système est équivalent à trouver les X vérifiant

$$M_0 X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \iff X = M_0^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Après produit matriciel, on trouve que l'unique solution est $\boxed{(4;1;-3)}$.