Devoir sur table # 6

30/03/2024 – Durée : 3h30

Consignes. *Le sujet est constitué de **deux pages**. L'exercice et les deux problèmes sont indépendants. Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.*

*Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant, en les surlignant ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'usage de la calculatrice est strictement **interdit**.*

Temps conseillé par exercice :
Exercice 1 : 20 minutes – Problème 1 : 1h35 – Problème 2 : 1h35

Exercice 1 | Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. [Solution]

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{\sin(x)} & \text{si } 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Monter que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$
3. Justifier la dérivabilité de f sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Problème 1 | Probabilités. [Solution]

Dans tout l'exercice, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2. On dispose d'un sac contenant 10 dés à 6 faces :

- deux dés sont truqués (l'un pour lequel la probabilité d'obtenir 6 est nulle, et l'autre qui amène « 6 » à chacun de ses lancers),
- les 8 autres dès sont équilibrés, non truqués $\Big($la probabilité d'obtenir le numéro 6 avec ces dés vaut $\dfrac{1}{6}\Big)$.

On réalise l'expérience suivante : on pioche dans le sac l'un des dix dès (avec équiprobabilité) puis, sans plus changer de dé, on effectue n lancers successifs.

On introduit les évènements suivants :

- E : « le dé pioché est équilibré »
- J : « le dé pioché est le dé truqué qui n'amène jamais 6 »
- T : « le dé pioché est le dé truqué qui amène toujours 6 »

Enfin, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note S_k l'évènement : « on obtient un 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

1. Soit $k \in [\![1; n]\!]$.
   - **(a)** Donner les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_E(S_k), \mathbb{P}_J(S_k)$ et $\mathbb{P}_T(S_k)$. En déduire que $\mathbb{P}(S_k) = \dfrac{7}{30}$.
   - **(b)** On a obtenu 6 au premier lancer. Quelle est la probabilité d'avoir pioché un dé équilibré ?
2. On suppose qu'on lance deux fois le dé pioché au hasard dans l'urne.
   - **(a)** En s'inspirant de la question **1.(a)**, montrer que $\mathbb{P}(S_1 \cap S_2) = \dfrac{11}{90}$
   - **(b)** Les événements S_1 et S_2 sont-ils indépendants ?
   - **(c)** Calculer : $\mathbb{P}_{S_1}\left(\overline{S_2}\right)$.

Dans tout le reste de l'exercice, on lance n fois le dé pioché au hasard dans l'urne (avec $n \geq 2$ fixé).

On note D_n l'évènement : « obtenir le 6 à chacun des n lancers ».

3. - **(a)** Exprimer D_n à l'aide des évènements $S_1, S_2, \ldots, S_n$.
   - **(b)** Montrer que : $\mathbb{P}(D_n) = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n + \dfrac{1}{10}$.
   - **(c)** On note p_n la probabilité, sachant qu'on a obtenu 6 à chacun des n lancers, d'avoir lancé le dé amenant toujours 6. Déterminer p_n en fonction de n, puis calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter.
   - **(d)** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer la probabilité de l'évènement G_k : « ne jamais obtenir le numéro 6 sur les k premiers lancers ».
   - **(e)** En déduire que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$: $\mathbb{P}_{\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\cdots\cap\overline{S_{k-1}}}\left(\overline{S_k}\right) = \dfrac{\frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^k + \frac{1}{10}}{\frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + \frac{1}{10}}$
4. On note W_n l'évènement : « obtenir au moins une fois le numéro 6 au cours des n lancers » et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note E_k l'évènement : « obtenir pour la première fois le numéro 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».
   - **(a)** Calculer $\mathbb{P}(E_k)$ pour $k \geq 2$, puis déterminer $\mathbb{P}(E_1)$
   - **(b)** Exprimer W_n à l'aide des évènement $(E_k)_{1\leq k\leq n}$. En déduire que $\mathbb{P}(W_n) = \alpha - \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ avec $\alpha \in]0, 1[$ à préciser.
   - **(c)** A l'aide de la question **4.(b)**, retrouver la probabilité de G_n déterminée dans la question **3.(d)**.

Problème 2 | Coefficient dominant d'un polynôme interpolateur. [Solution]

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées de manière indépendante.

PARTIE I — POLYNÔMES INTERPOLATEURS DE LAGRANGE. Le but de cette première partie est de démontrer un théorème du à LAGRANGE (1736 - 1813), permettant de répondre à la question suivante : « étant donnés $n \geq 1$ réels distincts $(x_1, \dots, x_n)$ et n réels quelconques $(y_1, \dots y_n)$, peut-on construire un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ de sorte que $\mathrm{P}(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$ » ?

La question **1.** traite le cas particulier où $n = 3$, le cas plus général $n \geq 1$ quelconque est traité en question **2.**

1. Soient (x_1, x_2, x_3) trois réels distincts, et (y_1, y_2, y_3) trois réels quelconques. On veut montrer dans cette question qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 tel que pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on ait $\mathrm{P}(x_i) = y_i$.

(a) ***Étude d'un exemple.*** A l'aide d'un système linéaire, montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 tel que $\mathrm{P}(1) = 1$, $\mathrm{P}(2) = -3$ et $\mathrm{P}(-1) = 3$. On cherchera P sous la forme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$, avec a, b et c trois réels à déterminer.

Dans la suite de cette question, on revient au cas où (x_1, x_2, x_3) sont trois réels distincts, et (y_1, y_2, y_3) sont trois réels quelconques.

(b) On définit les polynômes L_1, L_2 et L_3 par

$$\mathrm{L}_1 = \frac{(\mathrm{X}-x_2)(\mathrm{X}-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)},\quad \mathrm{L}_2 = \frac{(\mathrm{X}-x_1)(\mathrm{X}-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\quad \text{et } \mathrm{L}_3 = \frac{(\mathrm{X}-x_1)(\mathrm{X}-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

(i) Calculer : $\mathrm{L}_1(x_1)$, $\mathrm{L}_1(x_2)$ et $\mathrm{L}_1(x_3)$.

(ii) Calculer : $\mathrm{L}_2(x_1)$, $\mathrm{L}_2(x_2)$ et $\mathrm{L}_2(x_3)$.

(iii) Calculer : $\mathrm{L}_3(x_1)$, $\mathrm{L}_3(x_2)$ et $\mathrm{L}_3(x_3)$.

(c) On pose $\mathrm{P} = y_1\mathrm{L}_1 + y_2\mathrm{L}_2 + y_3\mathrm{L}_3$. Montrer que l'on a bien $\mathrm{P}(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$.

(d) Soit Q un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que $\mathrm{Q}(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$. Montrer que l'on a $\mathrm{Q} = \mathrm{P}$. En déduire que le polynôme répondant à la question **1.** est bien unique.

2. On cherche à généraliser le résultat précédent. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On considère donc n réels distincts $(x_1, \dots, x_n)$, et n réels quelconques $(y_1, \dots, y_n)$, et on veut montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $\mathrm{P}(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

(a) Pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$, on pose :

$$\widetilde{\mathrm{L}_i} = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \frac{\mathrm{X}-x_k}{x_i-x_k}.$$

Soient i et j deux entiers naturels compris entre 1 et n. Montrer que l'on a $\widetilde{\mathrm{L}_i}(x_i) = 1$, et $\widetilde{\mathrm{L}_i}\left(x_j\right) = 0$ si $j \neq i$.

(b) À l'aide des polynômes $\widetilde{\mathrm{L}_i}$, construire un polynôme P qui répond à la question.

(c) Montrer que ce polynôme est le seul polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $\mathrm{P}(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

PARTIE II — DÉTERMINATION D'UN COEFFICIENT DOMINANT. Dans toute la suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on s'intéresse au polynôme P_n de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\deg(\mathrm{P}_n) = n, \qquad \text{et :} \quad \forall k \in [\![1,n+1]\!],\quad \mathrm{P}_n(k) = \frac{1}{k^2}.$$

On admet qu'un tel polynôme existe et qu'il est unique pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Le but de cette partie est de déterminer le coefficient dominant de P_n. On note a_n le coefficient dominant de P_n.

3. On pose : $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) - 1$.

(a) Donner, sans justification, le degré de Q et son coefficient dominant.

(b) Justifier que 1 et $n+1$ sont des racines de Q.

(c) Montrer plus généralement qu'il existe un polynôme $\mathrm{T} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \left[\prod_{k=1}^{n+1}(\mathrm{X}-k)\right]\mathrm{T}(\mathrm{X}).$$

Dans toute la suite, on pose $\mathrm{W} = \prod_{k=1}^{n+1}(\mathrm{X}-k)$ de sorte que $\mathrm{Q} = \mathrm{WT}$.

(d) Que vaut $\deg(\mathrm{W})$? Que vaut $\deg(\mathrm{T})$?

(e) Justifier que : $\mathrm{W}(0) = (-1)^r \times (r!)$ avec r à préciser en fonction de n.

(f) En déduire que : $\mathrm{T}(0) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

(g) Démontrer que : $\mathrm{T} = a_n\mathrm{X} + \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$. *<u>Indication :</u> On pourra librement utiliser que le coefficient dominant d'un produit de polynômes non nuls est le produit des coefficients dominants des polynômes.*

4. On admet que : $\mathrm{W}'(0) = (-1)^n(n+1)!\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$.

(a) Justifier que : $\mathrm{Q}'(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + (-1)^{n+1}(n+1)!a_n$.

(b) En déduire la valeur de a_n en fonction de n et de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$.

Fin du sujet