Chapitre # (ALG) 10 — Introduction aux espaces vectoriels

Résumé & Plan

Le but de ce chapitre est d'introduire la notion d'espace vectoriel et de sous-espace vectoriel. Nous présenterons les différentes natures de familles (famille génératrice, famille liée, famille libre, base) de vecteurs d'un espace vectoriel, ainsi que la notion de dimension.

Intérêt des raisonnements algébriques Ce chapitre — ainsi que quelques autres pendant l'année — s'inscrit dans le domaine de l'*Algèbre* en Mathématiques, dont la vocation principale est l'étude d'ensembles munis de lois, et la recherche d'un cadre commun à plusieurs objets mathématiques. Une fois ce cadre dégagé (voir la Définition 1 ci-dessous) nous l'étudierons en détail.

Comment comprendre facilement les définitions ? Gardez à l'esprit que toutes les notions qui vont être présentées, quoique abstraites à première vue, sont des généralisations de quelque chose de concret que vous connaissez déjà (vecteurs, repères, coordonnées, ...).

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi, tous les énoncés faisant intervenir $\mathbb{K}$ sont vrais que $\mathbb{K}$ soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. ESPACE VECTORIEL, SOUS-ESPACE VECTORIEL

1.1. Espace vectoriel

Définition 1 | Espace vectoriel

On appelle *espace vectoriel* (ou *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$) tout triplet $(\mathrm{E},+,\cdot)$ où :

1. $(\mathrm{E},+)$ est un *groupe commutatif* c'est-à-dire :
   - **(i)** $+$ est une *loi interne* appelée *addition de* E :
   $$+\left|\begin{array}{ccc}\mathrm{E}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E},\\ (x,y) & \longrightarrow & x+y.\end{array}\right.$$
   - **(ii)** $+$ est *associative* : $\forall x,y,z\in\mathrm{E},\quad (x+y)+z=x+(y+z)$,
   - **(iii)** **[Neutre 0_E pour $+$]** $\forall x\in\mathrm{E},\quad x+0_\mathrm{E}=0_\mathrm{E}+x=x$,
   - **(iv)** tout élément de E est inversible pour $+$:
   $$\forall x\in\mathrm{E},\quad \exists y\in\mathrm{E},\quad x+y=y+x=0_\mathrm{E}.$$
   L'élément y inverse de x sera noté $-x$.
   - **(v)** La loi $+$ est *commutative, i.e.* $\forall x,y\in\mathrm{E},\quad x+y=y+x$.
2. La loi $\cdot\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E}\\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda\cdot x\end{array}\right.$ est appelée *loi externe*. Elle vérifie en outre les règles de calcul suivantes : pour tous $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $(x,y)\in\mathrm{E}^2$, on a :
   - **(i)** $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$,
   - **(ii)** $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$,
   - **(iii)** $(\lambda\times\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$,
   - **(iv)** $1x=x$.

De plus,
- les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les *scalaires*, les éléments de E sont les *vecteurs*, $\mathbb{K}$ est appelé le *corps de base*.
- L'élément neutre de E pour la loi $+$ est appelé *vecteur nul*, et on le notera 0_E comme précédemment, ou simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque 1

- Toutes les propriétés précédentes sont des règles de calcul dans E, et sont comparables aux règles habituelles sur les nombres réels et vecteurs du plan ou de l'espace que vous utilisez depuis longtemps.
- La tradition veut qu'on ne mette pas de flèches sur les vecteurs en algèbre linéaire.
- Vérifier qu'un ensemble donné muni de deux opérations est un espace vectoriel est très fastidieux. Ainsi, on ne vous demandera jamais de prouver qu'un tel ensemble est un espace vectoriel mais plutôt qu'il s'agit d'un « sous-espace vectoriel » d'un espace vectoriel connu (voir une prochaine section). Des espaces vectoriels de référence seront également étudiés.

Attention

Dans un espace vectoriel, vous pouvez multiplier les vecteurs $x \in \mathrm{E}$ par des **scalaires** $\lambda \in \mathbb{K}$, **mais pas** multiplier deux vecteurs $x, y \in \mathrm{E}$ entre eux, en règle générale. [1]

En combinant la stabilité par somme et multiplication par un scalaire, on obtient directement la propriété qui suit.

Proposition 1 | Stabilité d'un espace vectoriel par combinaison linéaire

Soit E un espace vectoriel. Pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \mathrm{E}.$$

Preuve Puisque E est un espace vectoriel, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$x_i \in \mathrm{E} \underset{\text{stabilité par multiplication externe}}{\Longrightarrow} \lambda_i x_i \in \mathrm{E} \underset{\text{stabilité par somme}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \mathrm{E}.$$

Par exemple, si x, y et z sont trois vecteurs d'un espace vectoriel E, alors :

$$2x - 3y + 10y \in \mathrm{E}.$$

On dira plus tard qu'un espace vectoriel est « stable par combinaison linéaire ».

PREMIERS EXEMPLES. Donnons sans plus tarder quelques exemples d'espaces vectoriels. La vérification complète des axiomes peut être exhaustive, seuls quelques-uns seront précisés.

1. Même si dans certains espaces vectoriels c'est possible, par exemple il est possible de multiplier deux polynômes entre eux.

Exemple 1 **(Cas de $\mathrm{E} = \mathcal{V}$, ensemble des vecteurs du plan.)** Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan. Alors :

$(\mathcal{V}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel.

- ***Addition.***
- ***Multiplication externe.***

Exemple 2 **(Cas de $\mathrm{E} = \mathbb{R}$)** L'ensemble $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (muni de l'addition et de la multiplication usuelle).

Exemple 3 **(Cas de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$)** L'ensemble $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- ***Addition.*** Pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$,
$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
- ***Multiplication externe.*** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$
- ***Vecteur nul.***

Remarque 2 Il est possible de confondre l'ensemble des vecteurs du plan $\mathcal{V}$ avec l'ensemble $\mathbb{R}^2$, en identifiant un vecteur à l'aide de ses deux coordonnées.

Exemple 4 (Cas de $E = \mathbb{R}^n$, ensemble des n-uplets (où $n \in \mathbb{N}^\star$))
Soients $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on définit :

$$X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Le triplet $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
L'élément 0_E est ici le n-uplet nul $0_E = (0, \dots, 0)$, l'élément opposé pour $+$ de $X = (x_1, \dots, x_n)$ est le n-uplet $-X$ défini par $-X = (-x_1, \dots, -x_n)$, car $X + (-X) = 0_E$.

Remarque 3 De la même façon que pour les vecteurs du plan, tout vecteur de l'espace est identifié via trois coordonnées, *i.e.* un élément de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5 (Cas de $E = \mathbb{K}^n$, ensemble des n-uplets (où $n \in \mathbb{N}^\star$))
Soient $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on définit :

$$X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Le triplet $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
L'élément 0_E est ici le n-uplet nul $0_E = (0, \dots, 0)$, l'élément opposé pour $+$ de $X = (x_1, \dots, x_n)$ est le n-uplet $-X$ défini par $-X = (-x_1, \dots, -x_n)$ car $X + (-X) = 0_E$.

Remarque 4 Le programme de première année de BCPST est limitatif : nous étudierons essentiellement les propriétés de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Il n'est pas possible de représenter « géométriquement » l'ensemble $\mathbb{K}^n$ si :
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n \geq 4$ (vous pouvez toujours essayer!),
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $n \geq 2$.

Exemple 6 (Cas $E = \mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes.) Nous avons défini dans le chapitre sur les polynômes deux lois $+, .$ sur les polynômes (somme de polynômes, multiplication par une constante).
Plus précisément : soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$.
Si par exemple $q < p$, on peut écrire $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ en posant $b_k = 0$ pour k vérifiant $q < k \leq p$. On définit alors :
- $\boxed{\textit{Addition.}}$ $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$
- $\boxed{\textit{Multiplication externe.}}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot P = \sum_{k=0}^{p} (\lambda a_k) X^k$.

Le triplet $(\mathbb{R}[X], +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'élément 0_E est ici le polynôme nul $0_E = 0$, l'élément opposé pour $+$ de P est $-P$ car $P + (-P) = 0$.

RÈGLES DE CALCULS SECONDAIRES. De la définition d'un espace vectoriel découlent directement d'autres propriétés.

Proposition 2 | Autres règles de calcul
Soit E un espace vectoriel. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tout $(x, y) \in E^2$, on a :
- **[Développement d'une expression]** $\begin{cases} (\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x \\ \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y \end{cases}$
- **[Multiplication par zéro]** $0_\mathbb{K} x = 0_E, \quad \lambda \cdot 0_E = 0_E,$
- **[Multiplication par l'opposé]** $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x),$
- **[Équation-produit]** $\lambda \cdot x = 0_E \iff (\lambda = 0_\mathbb{K}$ **ou** $x = 0_E)$.

Remarque 5 La dernière assertion n'a *a priori* rien d'évident, d'ailleurs elle est même fausse pour d'autres ensembles que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais dans notre cadre (*cf.* début de chapitre) ce sera toujours le cas.

Preuve Démontrons l'équivalence pour l'équation-produit.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\lambda \cdot x = 0_E$.

- **[1er cas]** si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors on peut multiplier l'hypothèse par $\frac{1}{\lambda}$ à gauche :
$$\frac{1}{\lambda}(\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda}0_E = 0_E \Longrightarrow x = 0_E.$$
- **[2ème cas]** $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Évident par définition d'un espace vectoriel : $0 \cdot x = 0_E$ et d'autre part $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

Remarque 6 **(Notion de vecteur)** On appelle tout élément d'un espace vectoriel un **vecteur**. Ainsi, par exemple, un polynôme est un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. En particulier on appellera toujours les éléments $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ des vecteurs.

1.2. Sous-espaces vectoriels

La structure de sous-espace vectoriel aura un intérêt pour justifier qu'un ensemble est un espace vectoriel. En effet, nous allons voir que si un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, alors ce sous-ensemble sera aussi un espace vectoriel (et il est plus facile de vérifier la propriété de sous-espace vectoriel que d'espace vectoriel).

Définition 2 | Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et soit F une partie de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
Autrement dit, $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E lorsqu'il est lui même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'on le munit des lois induites par l'addition des vecteurs de E et par la multiplication externe définie sur E.

Remarque 7 Si F est un sous-espace vectoriel de E, on peut démontrer que F et E ont même élément neutre. En particulier : $0_F = 0_E \in F$, et F est nécessairement un ensemble **<u>non-vide</u>**.

En pratique, il existe deux caractérisations équivalentes pour démontrer qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 3 | Caractérisation des sous-espaces vectoriels, version 1

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
- F est une partie non-vide de E,
- F est stable par addition, *i.e.* : $\forall (u, v) \in F^2, \quad u + v \in F$.
- F est stable par multiplication par un scalaire, *i.e.* $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{K} \times F, \quad \lambda u \in F$.

On préfère souvent utiliser la seconde caractérisation, plus compacte :

Proposition 4 | Caractérisation des sous-espaces vectoriels, version 2

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
- $F \subset E$,
- $F \neq \emptyset$,
- F est *stable par combinaison linéaire :*
$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F.$$

Remarque 8 **(A propos de l'élément neutre)**
- Pour montrer que $F \neq \emptyset$, on montre que $0_E \in F$.
- Si $0_E \notin F$, F n'est pas un sous-espace vectoriel de E

Remarque 9 **(Économie de rédaction)** Comme déjà souligné, l'énorme intérêt de la notion de la notion de sous-espace vectoriel réside dans la proposition précédente : une économie dans la rédaction. En effet, il nous suffira de vérifier qu'une structure est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel du cours (fait que vous avez le droit d'utiliser sans argument supplémentaire, seulement 3 axiomes à vérifier, beaucoup plus rapide que la Définition 1), pour justifier la structure d'espace vectoriel.

Méthode Montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E à l'aide de la définition

- On vérifie (rapidement) que $F \subset E$.
- On vérifie que $0_E \in F$ (ce qui assure notamment que F est non-vide).
- Soit $(u, v) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  On montre que $\lambda u + \mu v$ est dans F.

On peut alors conclure que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 7 **(Sous-espaces vectoriels triviaux)** Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ admet au moins pour sous-espaces vectoriels E et $\{0_E\}$ (sous-espaces vectoriels triviaux de $(E, +, \cdot)$).

Exemple 8 **(Dans $\mathbb{R}^2$)** .

1. La droite $\mathscr{D}_1$ du plan d'équation cartésienne $2x+3y=0$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathscr{D}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x+3y=0\right\}$, est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Remarque 10 Un peu plus tard, en pratique, nous disposerons d'une méthode plus efficace pour montrer qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (méthode « à l'aide d'un Vect » que l'on utilisera systématiquement dans $\mathbb{R}^n$).

Méthode **Montrer qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel**

Pour montrer qu'un ensemble **n'est pas** un espace vectoriel, deux options sont possibles (au choix).

1.1) Mise en défaut du neutre — c'est-à-dire qu'il ne contient pas le neutre d'un espace vectoriel plus gros.

1.2) Mise en défaut de la stabilité — c'est-à-dire on montre qu'il n'est pas stable par combinaison linéaire. Par exemple :
- deux vecteurs dont la somme n'est pas dans l'espace,
- un vecteur dont l'opposé n'est pas dans l'espace, ...

2. La droite $\mathscr{D}_2$ du plan d'équation cartésienne $2x+3y=1$ est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

3. Soit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0\}$. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Proposition 5 | Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$

On peut démontrer que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont exactement :

- $\mathbb{R}^2$ tout entier,
- $\{(0,0)\}$,
- toute droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $\{(0,0)\}$.

De la même façon, on peut démontrer que :

Proposition 6 | Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont exactement :

- $\mathbb{R}^3$ tout entier.
- $\{(0,0,0)\}$
- Toute droite de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$.
- Tout plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$

Remarque 11 (Vision « géométrique » de sous-espaces vectoriels.) Ces deux propositions sont très importantes car elles permettent de mieux comprendre ce que sont les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel ambiant. En effet dans le cadre où on sait faire de la géométrie, il correspondent aux plans et aux droites : rien de « courbé » (comme une parabole, une sphère, ...) ni de borné (comme un pavé, une demi-droite, ...).
On peut donc imaginer les sous-espaces vectoriels d'autres espaces de la même façon : dans $\mathbb{R}^4$ se seront les droites et plans passant par $0_{\mathbb{R}^4}$, mais aussi les « espaces » plats contenant $0_{\mathbb{R}^4}$.
Autrement dit, le mot sous-espace vectoriel regroupe et remplace des notions de « plan » et de « droite », et les généralise pour parler d'objets similaires dans d'autres contextes.

Exemple 9 (Dans $\mathbb{R}$) Le segment $A = [-2;2]$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$?

Exemple 10 (Dans des espaces de polynômes.) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Alors $\mathbb{R}_n[X]$ — l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n — est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2. En revanche, l'ensemble E des polynômes de degré n, n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Pourquoi ?

1.3. Intersection de sous-espaces vectoriels.

Proposition 7 | L'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.
Alors, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve

Attention — Réunions d'espaces vectoriels

En général, la réunion $F \cup G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G n'est pas un sous-espace vectoriel (sauf si $F \subset G$, auquel cas $F \cup G = G$ ou si $G \subset F$, auquel cas $F \cup G = F$).

Exemple 11 Représenter deux espaces vectoriels dans $\mathbb{R}^2$ dont la réunion n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2. SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ PAR UNE FAMILLE DE VECTEURS

Maintenant que le cadre est posé, regardons ce que l'on peut faire avec les vecteurs, *i.e.* les éléments d'un espace vectoriel. En combinant les deux lois définies plus haut (additive et scalaire-multiplicative), on arrive directement à la notion de combinaison linéaire présentée ci-après.

2.1. Combinaisons linéaires

Définition 3 | Combinaison linéaire de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs x_1, ..., x_n tout vecteur $x \in E$ s'écrivant sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \qquad \text{où pour tout } k \in [\![1\,,\,n]\!] \text{, on a } \lambda_k \in \mathbb{K}.$$

Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.

Exemple 12 Soit $F = \{(x+y, y, x-2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F est l'ensemble des combinaisons linéaires de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 13 Dans $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$,

1. Le vecteur $(1,1,1)$ est-il combinaison linéaire de $(1,2,3)$ et $(3,2,1)$?

2. Le vecteur $(1,0,1)$ est-il combinaison linéaire de $(1,2,3)$ et $(3,2,1)$?

Attention **Attention au sens des mots**

- $1,2,3$ sont des nombres **tous non nuls**
- $1,0,3$ $\begin{cases} \text{ne sont pas tous nuls} \\ \text{sont des nombres } \textbf{non tous nuls} \end{cases}$

Il peut arriver qu'une combinaison linéaire de vecteurs donne le vecteur nul avec des coefficients non tous nuls. Par exemple : $(1,1,1) - \frac{1}{4}(1,2,3) - \frac{1}{4}(3,2,1) = (0,0,0)$.

Définition 4 | Relation linéaire

On appelle **relation linéaire** entre p vecteurs $x_1, \dots, x_p$ ($p \in \mathbb{N}^\star$) d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E une combinaison linéaire $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$ égale à 0_E avec les $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls.

Attention **Pêché d'identification**

En général : $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=0}^{n} \mu_k x_k \not\Longrightarrow \forall k \in [\![1; n]\!], \quad \lambda_k = \mu_k.$

$\boxed{\textbf{Pas d'identification intempestive!}}$

Par exemple, $(1,1) + 2(0,1) + 2(1,0) = (3,3) = 2(1,1) + (0,1) + (1,0)$

2.2. Sous-espace vectoriel engendré par une partie de E

Définition 5 | Notation Vect(A)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit A une partie de E. *(A désigne en général un ensemble de vecteurs.)*

On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** A le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A. On le note Vect(A).

Quelques figures vaudront mieux qu'un long discours.

Exemple 14 (Quelques figures)

1. Dans $\mathbb{R}^2$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 8 | $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A

Si A est une partie non-vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires obtenues avec les éléments de A.

En particulier, si $x_1, \cdots, x_p$ sont p vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors :

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \left\{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\right\}$$

Note | *On dit que* $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ *est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs* $x_1, \dots, x_p$

Remarque 12 Par exemple, si x_1, x_2 et x_3 sont trois vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E :

$\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3) =$

Exemple 15 (Espace vectoriel engendré par un vecteur (droite vectorielle))

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Si $x \in E$ avec $x \neq 0_E$, alors :

$$\mathrm{Vect}(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 16 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, représenter l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}((2,1))$ et l'espace vectoriel $G = \mathrm{Vect}((0,1),(0,2))$.

Remarque 13 Fait important :

L'espace engendré par une famille de vecteurs est un espace vectoriel.

Ainsi, pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel, il suffit la plupart du temps de « l'écrire comme un Vect » c'est-à-dire exprimer chacun de ses éléments comme combinaison linéaire de vecteurs d'une famille donnée.

Exemple 17 **(Ecritures d'ensembles à l'aide d'un « Vect »)**

1. Montrer que l'ensemble $F = \{(2a+b, 3b, a); (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $F = \{(0, x+t, -x+2t, 3t) \mid x, t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3. Montrer que l'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 14 De façon générale, il existe principalement deux types de représentation des sous-espaces de $\mathbb{K}^n$:

- ⋆ **Paramétrisation linéaire du sous-espace** : il s'agit de préciser une famille de vecteurs qui l'engendrent. Par exemple :
$$F = \mathrm{Vect}(a,b) \subset \mathbb{K}^4 \qquad \text{où} \qquad a = (1,2,1,1) \quad \text{et} \quad b = (0,1,1,1)$$
- ⋆ **Description du sous-espace par équations linéaires** : ce sont des équations sur les coordonnées des vecteurs, qui caractérisent les vecteurs du sous-espace. Par exemple :
$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x+y+z+t=0 \text{ et } x=y\} \subset \mathbb{K}^4.$$

Passer d'une description par équations linéaires à une représentation paramétrique permet donc d'écrire un sous-ensemble comme un sous-espace vectoriel engendré par une partie et justifier du même coup qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel.

Exemple 18 Montrer que $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x+y+z+t=0 \text{ et } x=y\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$.

2.3. Propriétés du Vect.

Exemple 19 **(Illustrations des propriétés du Vect)**
Soit E un espace vectoriel. Soient u et v deux vecteurs de E. Alors :

- $\mathrm{Vect}(2u, -6v) = \mathrm{Vect}(u, v)$.
  En effet : $e = \lambda u + \mu v \iff e = \left(\frac{\lambda}{2}\right)(2u) + \left(-\frac{\mu}{6}\right)(-6v)$
  donc toute combinaison linéaire de u et v est aussi une combinaison linéaire de $2u$ et $-6v$ et réciproquement.
- $\mathrm{Vect}(u, v + 3u) = \mathrm{Vect}(u, v)$
  En effet : $e = \lambda u + \mu v \iff e = (\lambda - 3\mu)u + \mu(v + 3u)$
  donc toute combinaison linéaire de u et v est aussi une combinaison linéaire de u et $v + 3u$ et réciproquement.
- Soit $w \in \mathrm{Vect}(u, v)$. Alors $\mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathrm{Vect}(u, v)$.
  En effet : si $w = au + bv$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors :
  $$e = \lambda u + \mu v + \nu w \iff e = (\lambda + \nu a)u + (\mu + b\nu)v$$
  donc toute combinaison linéaire de u, v et w est aussi une combinaison linéaire de u et v et réciproquement.

On résume ces résultats dans la proposition suivante :

Proposition 9 | Propriétés du Vect
Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteur d'un espace vectoriel E.
L'espace engendré par cette famille reste inchangé si :

- On multiplie un ou plusieurs des vecteurs de la famille par des scalaires non nuls.
- On ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- On rajoute dans la famille une combinaison linéaire des vecteurs de départ.

Cette proposition peut être résumée ainsi.

- **On ne change pas un** Vect **en ajoutant un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.**
- **On ne change pas un** Vect **en multipliant l'un des vecteurs par un scalaire non nul.**

Exemple 20 Montrer que dans $\mathbb{R}^3$:
$$\mathrm{Vect}((1,1,0);(0,1,0);(1,3,0)) = \mathrm{Vect}((1,1,0);(0,1,0)).$$

2.4. Inclusions entre espaces vectoriels engendrés

Proposition 10
Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$espace vectoriel E.
Soit $(u_1, \dots, u_p) \in F^p$. Alors : $\quad \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) \subset F$.

Preuve

Remarque 15 La réciproque est vraie : si $\mathrm{Vect}\left(u_1, .., u_p\right) \subset F$, alors chaque u_k appartient bien à F.

Méthode **Montrer une inclusion avec des Vect**

Écrivons la méthode par exemple pour des familles de deux vecteurs. Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ deux familles de vecteurs.
Alors, montrer que $\mathrm{Vect}(x_1, x_2) \subset \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$, revient à montrer que :

$$\forall i \in [\![1\,,\,2]\!], \quad x_i \in \mathrm{Vect}(y_1, y_2),$$

En effet, puisque $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ est un espace vectoriel, s'il contient x_1, x_2, alors il contient toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs (par la proposition précédente).

Exemple 21 Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (2, -1, -2)$ et $u_3 = (-7, 5, 7)$ puis $E = \mathrm{Vect}(u_3)$ et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. A-t-on $E \subset F$?

3. FAMILLES DE VECTEURS

Définition 6 | Famille
Soit E un espace vectoriel.
Une famille de $p \in \mathbb{N}^\star$ vecteurs de E est la donnée d'un p-uplet de vecteurs de E.

Exemple 22 **(Exemples de familles)**

- $((-1, 2, 1), (2, 2, 1))$ est une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
- $((0, 0, 0, 0), (8, \pi, -9, 10), \left(-6, 7, \frac{3}{2}, 5\right)$ est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

3.1. Famille génératrice

Définition 7 | Famille génératrice
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soient $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E ($p \in \mathbb{N}^\star$).
On dit que la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est **génératrice** si :

$$E = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p),$$

i.e. tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$:

$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, \dots \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p.$$

Note | *On dit aussi que la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ engendre* E.

Exemple 23 (Quelques familles génératrices)

- Dans $\mathbb{R}^2$,

- On a vu que :

$$\mathrm{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x-y\} = \mathrm{Vect}((1,0-1);(0,1,-1)).$$

La famille $((1,0-1);(0,1,-1))$ est donc une famille génératrice du sous-espace vectoriel F.

Méthode — Montrer qu'une famille $(x_1,\dots,x_p)$ donnée engendre un sous-espace vectoriel E

- Justifier si nécessaire que chaque vecteur x_k appartient bien à E.
- Considérer un vecteur x quelconque de F et chercher s'il existe des scalaires $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ tels que x s'écrive comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(x_1,\dots,x_p)$.
- Écrire le système linéaire correspondant à l'égalité $x = \lambda_1 x_1 + \dots \lambda_p x_p$.
- Le résoudre : s'il est compatible, u s'écrit bien comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(x_1,\dots,x_p)$.

Exemple 24 (Dans $\mathbb{R}^2$.) Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants $x_1 = (1,-1)$, $x_2 = (0,1)$. La famille (x_1,x_2) est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?

Exemple 25 (Famille génératrice dans $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$)
Pour tout $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$x = x_1(1,0,\dots,0) + x_2(0,1,0,\dots,0) + \dots + x_n(0,0,\dots,0,1)$$

On note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la seule composante non nulle vaut 1 et est située au rang i :

$$e_i = (0,\ 0,\dots,0,\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rang i}}}{1},\ 0,\dots,0)$$

Alors : $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.
Ainsi : $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 26 (Famille génératrice dans $(\mathbb{R}_n[X],+,\cdot)$) Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$, alors P s'écrit sous la forme $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $(a_0,a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Donc : $(X^k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode — Exhiber une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel

Pour trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel, il suffit de l'écrire comme un Vect.

Exemple 27 Donner une famille génératrice du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}.$$

Propriétés des familles génératrices. On peut traduire les propriétés du Vect en terme de familles génératrices.

Proposition 11 | Propriétés des familles génératrices.
Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\left(e_1, \dots, e_p\right)$ une famille génératrice de F.

- La famille reste génératrice si on multiplie ses vecteurs par des scalaires non nuls.
- La famille reste génératrice si on additionne à un de ses vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.
- Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.
  En effet si (u, v) engendre F, et que l'on regarde le caractère générateur de (u, v, w) avec w dans F. Alors puisque (u, v) est déjà génératrice et $w \in F$, $w \in \mathrm{Vect}(u, v)$. On a donc ajouté un vecteur à la famille qui était dans l'espace engendré par les autres vecteurs, ça ne change pas l'espace engendré par la famille : $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u, v, w) = F$

Exemple 28 Soit $E = \mathbb{R}^2$. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants $x_1 = (1, -1)$, $x_2 = (0, 1)$, $x_3 = (19, 15)$. La famille (x_1, x_2, x_3) est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?

3.2. Famille libre, famille liée

Définition 8 | Famille libre, famille liée
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs de E ($n \in \mathbb{N}^\star$) est **libre** si toute combinaison linéaire nulle de vecteurs de cette famille ne peut être obtenue qu'avec des coefficients tous nuls. Autrement dit :
$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \implies \forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \lambda_k = 0\right].$$
  On dit encore que les vecteurs $(x_i)_{1 \le i \le n}$ sont **linéairement indépendants.**
- Dans le cas contraire, la famille est **liée**. Il existe une relation linéaire entre les vecteurs de la famille $(x_i)_{1 \le i \le n}$:
$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \quad \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E.$$

Remarque 16 **(Cas des « petites familles » d'un ou deux éléments.)**
Soit E un espace vectoriel.

1. Toute famille (x) constituée d'un vecteur non nul est libre.

2. Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

3. Dans tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une famille de deux vecteurs (x_1, x_2) de E est liée si et seulement si les vecteurs x_1 et x_2 sont colinéaires :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad x_1 = kx_2 \qquad \text{ou :} \qquad \exists k \in \mathbb{R}, \quad x_2 = kx_1$$

Remarque 17 La notion de famille libre est la généralisation à n vecteurs de la notion de deux vecteurs non colinéaires. Mais attention : une famille de vecteurs deux à deux non colinéaires n'est pas forcément libre !
Contre-exemple :

Exemple 29 **(Une famille libre dans $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$)**
Dans $\mathbb{R}^n$, on note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la seule composante non nulle vaut 1 et est située au rang i :

$$e_i = (0, \ 0, \dots, 0, \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rang i}}}{1}, \quad 0, \dots, 0)$$

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Alors : $\quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$.
D'où : $\quad \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
Donc $(e_i)_{1 \le i \le n}$ est libre.

Proposition 12 | Famille extraite d'une famille libre

Soit E un espace vectoriel.
Soit $\left(e_1,\ldots,e_p\right)$ une famille libre de vecteurs de E.
Toute sous-famille d'une famille libre est libre, *i.e.* si on retire des vecteurs e_i, la famille reste libre.

Preuve Soit $\left(e_1,\ldots,e_p\right)$ une famille libre de vecteurs de E.
Montrons par exemple que si on enlève e_p, la famille reste libre. La démonstration générale suit le même principe. On cherche donc à montrer que $\left(e_1,\ldots,e_{p-1}\right)$ est libre. Pour cela considérons $\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i e_i = 0_{\mathrm{E}}$ une combinaison linéaire nulle de cette famille, où les λ_i sont dans $\mathbb{K}$.
On écrit alors $0_{\mathrm{E}} = \sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i$ en posant $\lambda_p = 0_{\mathbb{K}}$.
On a donc obtenu une combinaison linéaire nulle de $\left(e_1,\ldots,e_p\right)$, qui par liberté de la famille est forcément triviale. On a donc :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$

et donc en particulier : $\forall i \in [\![1,p-1]\!], \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$ — ainsi, la première combinaison linéaire était déjà triviale. Donc $\left(e_1,\ldots,e_{p-1}\right)$ est libre.

Méthode Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre

- Si la famille contient un seul vecteur non nul, on pourra dire directement qu'elle est libre (on écrira « un seul vecteur non nul »).
- Si la famille contient deux vecteurs non colinéaires, on pourra dire directement qu'elle est libre (on écrira « deux vecteurs non colinéaires »).
- Si la famille contient $p \geq 3$ vecteurs :

« soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_{\mathbb{K}^n}$ », montrer que, nécessairement, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ ».

Exemple 30 Dans $\mathbb{R}^6$, la famille $\{(0,1,3,2,8,6),(8,7,2,1,0,7)\}$ est-elle libre ?

Exemple 31 Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathrm{L} = ((1,-1),(0,1),(1,1))$. L est-elle une famille libre ou liée ?

Exemple 32 Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,0,0);(1,1,0);(1,1,1))$ est-elle une famille libre ou liée ?

Exemple 33 Montrer que la famille $((2,1),(-1,3),(0,2))$ est liée dans $\mathbb{R}^2$.

3.3. Base

Nous arrivons à une notion qui généralise les repères que vous connaissez depuis que vous avez fait de la géométrie analytique (*i.e.* avec des coordonnées) en fin de collège.

Définition 9 | Base
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *base* de E toute famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice de E.

Nous allons voir que :

- le caractère générateur garantit l'existence d'une combinaison linéaire,
- le caractère libre garantit l'unicité des coefficients.

Une base garantit donc l'existence et l'unicité des coefficients, c'est ce que nous précisons maintenant.

Définition/Proposition 1 | Base et décomposition en coordonnées. Coordonnées d'un vecteur.

- Une famille finie $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit **de façon unique** comme combinaison linéaire des x_k.
- Si $x \in E$, notons $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que
$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$
Alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la constante λ_k s'appelle **la** k-ième coordonnée de x dans la base $(x_1, \dots, x_n)$. Les coordonnées de de x dans la base $(x_1, \dots, x_n)$ sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Preuve *(Preuve du premier point)*

En résumé,

LIBRE	$\equiv$	UNICITÉ des coefficients d'une combinaison linéaire
GÉNÉRATRICE	$\equiv$	EXISTENCE des coefficients d'une combinaison linéaire
BASE	$\equiv$	EXISTENCE **et** UNICITÉ des coefficients d'une combinaison linéaire $\rightsquigarrow$ « coordonnées »

En Mathématiques, l'adjectif *canonique* signifie parfois « le plus simple ». On présente donc quelques exemples de bases fondamentales dans la prochaine proposition, on vérifie sans aucune difficulté que ce sont bien des bases.

Définition/Proposition 2 | Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

- **[Dans $\mathbb{K}^n$]** Notons
$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$
La famille $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique de* $\mathbb{K}^n$.
- **[Dans $\mathbb{R}_n[X]$]** La famille $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, appelée *base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Preuve

1.

2.

Remarque 18 Le terme canonique désigne de fait que ce sont des bases « naturelles » des espaces en question, dans lesquels vous êtes habitués à décomposer les vecteurs. Par exemple, vous appelez depuis bien longtemps « coordonnées »d'un vecteur u de $\mathbb{R}^2$ le couple (x, y) de réels tels que

$$u = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2.$$

Il peut être moins aisé d'écrire une telle décomposition dans une autre base de $\mathbb{R}^2$, qui elle ne sera donc pas qualifiée de canonique !

Exemple 34 Quelle est la base canonique de $\mathbb{R}^4$?

Méthode Pour montrer qu'une famille donnée est une base

On montre qu'elle est à la fois génératrice et libre : soit en menant deux raisonnements distincts, soit quand c'est possible en montrant directement que les coefficients de la combinaison linéaire désirée existent **et sont uniques** (via une résolution de système par exemple).

Exemple 35 Montrer que la famille $\mathscr{B} = ((1,1);(1,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner les coordonnées dans cette base d'un vecteur dont les coordonnées dans la base canonique sont (x, y).

Méthode Trouver une abse d'un sous-espace vectoriel

Pour trouver une base d'un espace vectoriel, on cherche d'abord à exhiber une famille génératrice (c'est-à-dire à écrire l'espace en question comme un Vect) puis on essaie de montrer que cette famille est aussi libre. Si elle ne l'est pas, on enlève tout vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres. Voir aussi la méthode de l'échelonnement vertical (en fin de chapitre !).

Exemple 36 Trouver une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0\right\}.$$

Exemple 37 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \mathrm{Vect}((1,1,2,-1);(1,1,1,1);(-1,-1,0,-3)).$$

Déterminer une base de F.

4. DIMENSION

4.1. Définition

Définition 10 | Espace vectoriel de dimension finie
Soit E un espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice **finie**, et de *dimension infinie* sinon.

Exemple 38 **(Des espaces vectoriels de dimension finie)**

- Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\} = \mathrm{Vect}(0_E)$ est de dimension finie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie.

Nous admettons un résultat nommé *lemme de* STEINITZ dont la preuve est très technique, et qui permet de comparer le nombre d'éléments d'une famille libre par rapport au nombre d'éléments d'une famille génératrice.

Lemme 1 | Lemme de Steinitz : nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant une famille génératrice de p éléments. Alors toute famille libre de E possède au plus p éléments.

Preuve Admis ! La démonstration, technique, dépasse le cadre du programme.

Exemple 39 (Une famille « automatiquement » liée.) La famille $\{(1,3,3),(1,3,8),(5,6,8),(2,5,8)\}$ est liée (la base canonique de $\mathbb{R}^3$ comporte 3 éléments).

Définition/Proposition 3 | Dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

- si $E \neq \{0_E\}$: toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments, on l'appelle la *dimension* de E, et est notée $\dim E$,
- si $E = \{0_E\}$, on pose comme convention : $\dim\{0_E\} = \dim E = 0$.

Preuve Montrons que dans le cas $E \neq \{0_E\}$, toutes les bases ont même nombre d'éléments. Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux bases de E.

Définition 11 | Droite, Plan & Hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un sous-espace vectoriel F de E est appelé :

- *droite vectorielle* si $\dim F = 1$,
- *plan vectoriel* si $\dim F = 2$,
- *hyperplan* si $\dim E \geqslant 1$ et $\dim F = \dim E - 1$.

Exemple 40 Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$.

Exemple 41 Déterminer la dimension de

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \quad \text{et} \quad x-3y=0\}.$$

Attention **Confusion cardinal/dimension**

Ne pas confondre les notions de cardinal et de dimension ! Une famille a un certain cardinal mais pas de dimension, et par contre un espace vectoriel (de dimension finie) a une dimension mais est toujours de cardinal infini (sauf $\{0\}$). En revanche, on a toujours que si $\mathscr{B}$ est une base de E,

$$\dim E = \mathrm{Card}(\mathscr{B}).$$

Exemple 42 **(Dimension des espaces vectoriels classiques.)** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $\dim \mathbb{R}^n = n$ (notamment $\dim \mathbb{R} = 1$).
2. $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + \boxed{1}$.

4.2. Familles libres, génératrices, bases

Théorème 1 | Toute famille libre ou génératrice de $\dim E$ éléments est une base

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

- Toute famille libre à n éléments est une base de E.
- Toute famille génératrice à n éléments est une base de E.

Preuve *(La démonstration de ce théorème est hors-programme, on donne l'idée de la démonstration du premier point seulement.)*

-

- On l'admet.

Remarque 19 **(Cardinal maximal d'une famille libre.)** Si une famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie possède p éléments, alors : $p \leq \dim E$ (conséquence du Théorème 1).
De la même façon, si $\dim E = n$, toute famille composée de strictement plus de n vecteurs est liée, toute famille constituée de strictement moins de n vecteurs n'est pas génératrice.

Méthode **Montrer qu'une famille est une base**

Soit E un espace vectoriel. Pour montrer qu'un ensemble $\mathscr{A} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E :

- Soit on ne connaît pas la dimension de E, auquel cas on montre que la famille $\mathscr{A}$ est libre et génératrice,
- soit on connaît $\dim E = n$, auquel cas il suffit de montrer que $\mathscr{A}$ comporte $n = \dim E$ éléments et est libre ou génératrice.

Exemple 43 La famille $((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.3. Sous-espaces vectoriels et dimension

Proposition 13

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

- F est de dimension finie, et : $\dim F \leqslant \dim E$.
- $\dim F = \dim E \iff F = E$.

Preuve

Cette proposition permet par exemple de décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

Si F est un sev de $\mathbb{R}^2$ alors $0 \leqslant \dim(F) \leqslant 2$:

- si $\dim(F) = 0$ alors $F = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
- si $\dim(F) = 1$ alors F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$
- si $\dim(F) = 2$ alors $F = \mathbb{R}^2$

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ alors $0 \leqslant \dim(F) \leqslant 3$:

- si $\dim(F) = 0$ alors $F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
- si $\dim(F) = 1$ alors F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$
- si $\dim(F) = 2$ alors F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$
- si $\dim(F) = 3$ alors $F = \mathbb{R}^3$

Corollaire 1 | Méthode par inclusion et égalité de dimension

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

Si : $\begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G, \end{cases}$ alors : $F = G$.

Exemple 44 **(Inclusion et égalité des dimensions.)**

Posons $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x - 3y + z = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}(u,v)$ avec $u = (1,1,1)$ et $v = (2,1,-1)$ Montrons que $F = G$.

5. RANG D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

5.1. Définition

Définition 12 | Rang d'une famille de vecteurs

Soit $\left(x_1,...,x_p\right)$ une famille finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle *rang de la famille* $\left(x_1,\ldots,x_p\right)$, et on note $\operatorname{Rg}\left(x_1,\ldots,x_p\right)$, la dimension de $\operatorname{Vect}\left(x_1,\ldots,x_p\right)$:

$$\operatorname{Rg}\left(x_1,\ldots,x_p\right)=\dim\operatorname{Vect}\left(x_1,\ldots,x_p\right).$$

Exemple 45 (Un exemple graphique.)

✎

Remarque 20 Le rang de $\left(x_1,\ldots,x_p\right)$ est égal au nombre de vecteurs de la plus grande famille libre parmi eux.

Exemple 46 (Premiers petits calculs de rang)

- Dans $\mathrm{E}=\mathbb{R}^2$, $\operatorname{Rg}((1,1),(2,2),(0,0))=$
- Dans $\mathrm{E}=\mathbb{R}^3$, $\operatorname{Rg}((0,0,1),(0,1,0),(0,0,1))=$
- Dans $\mathrm{E}=\mathbb{R}^n$, $\operatorname{Rg}((0,\ldots,0))=$

Proposition 14 | Rang et liberté/généricité

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit une famille $\mathscr{F}$ de p vecteurs de E. Alors :

- $\mathscr{F}$ est libre $\iff \operatorname{Rg}(\mathscr{F})=p$,
- $\mathscr{F}$ est génératrice $\iff \operatorname{Rg}(\mathscr{F})=n$,
- $\mathscr{F}$ est une base $\iff \operatorname{Rg}(\mathscr{F})=n=p$.

En particulier, si $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors :

$$(e_1,\ldots,e_n) \text{ est une base de } \mathrm{E} \iff \operatorname{Rg}(e_1,\ldots,e_n)=n.$$

Preuve

- On sait que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Vect}\mathscr{F}$. Donc $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\mathscr{F}$ est une base de $\operatorname{Vect}\mathscr{F}$. Or $\mathscr{F}$ est une base de $\operatorname{Vect}\mathscr{F}$ si et seulement si :
  $$p=\operatorname{Card}\mathscr{F}=\dim\operatorname{Vect}\mathscr{F}=\operatorname{Rg}\mathscr{F}.$$
  Finalement $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\operatorname{Card}\mathscr{F}=p=\operatorname{Rg}\mathscr{F}$.
- Par définition $\mathscr{F}$ est génératrice de E si et seulement si $\mathrm{E}=\operatorname{Vect}\mathscr{F}$.
  Or, puisque $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})\subset\mathrm{E}$, on a d'après le Théorème 2 :
  $$\operatorname{Vect}(\mathscr{F})=\mathrm{E}\iff\operatorname{Rg}\mathscr{F}=\dim\mathrm{E}=n.$$
- $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre et génératrice de E. Avec ce qui précède : $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\operatorname{Rg}(\mathscr{F})=n=p$.

5.2. Détermination pratique du rang d'une famille de vecteurs

MATRICE D'UNE FAMILLE DE VECTEURS DANS UNE BASE. La détermination pratique du rang d'une famille utilise la notion de rang de matrice.

Définition 13 | Matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de base $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$.
Soit $\left(u_1,\ldots,u_p\right)$ une famille de p vecteurs de E ($p\in\mathbb{N}^\star$). On appelle matrice des coordonnées des vecteurs $\left(u_1,\ldots,u_p\right)$ dans la base $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ la matrice dont les colonnes sont respectivement les coordonnées de $\widetilde{e_1}$ dans $\mathscr{B}$, de $\widetilde{e_2}$ dans $\mathscr{B}$, etc.

Exemple 47 Soit $u_1 = (1,8,8)$ et $u_2 = (1,3,9)$ dans $\mathbb{R}^3$, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 2 | Détermination pratique du rang

Soit $\mathscr{F} = \left(u_1, \cdots, u_p\right)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$. Alors le rang de la famille $\mathscr{F}$ est égal au rang de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de chaque vecteur u_k dans la base $\mathscr{B}$.

On admet la preuve de ce théorème, que l'on justifie sur un exemple.

Exemple 48 **(Détail d'un exemple.)** Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E
Soit (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille de vecteurs de E. Supposons que l'on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}, \widetilde{e_3}, \widetilde{e_4}\right) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \widetilde{e_1} & \widetilde{e_2} & \widetilde{e_3} & \widetilde{e_4} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_1 & \star & \star & \star \\ 0 & a_2 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \end{array} \qquad \text{avec } a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0.$$

Notons A cette matrice.

Remarque 21 **(Propriétés du rang)** A l'instar des propriétés du Vect, on ne change pas le rang d'une famille de vecteurs en :

- multipliant l'un des vecteurs par un scalaire non nul,
- en rajoutant à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

De même, les transformations usuelles du pivot de Gauss sur la matrice des coordonnées de $\left(\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_p}\right)$ ne changent pas le rang. De plus, on peut permuter des colonnes de la matrice, puisque cela revient à considérer la même famille, les vecteurs n'étant pas rangés dans le même ordre.

Méthode — Trouver le rang d'une famille de vecteurs

- Écrire la matrice de la famille de vecteurs dans la base canonique.
- Calculer le rang de la matrice avec la méthode du pivot de Gauss.
- Le résultat trouvé est le rang de la famille de vecteurs.

Exemple 49 Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille

$$\mathscr{F} = ((1,-1,1);(-1,1,-1);(0,1,1);(1,0,2)).$$

Remarque 22 Si l'on recherche aussi une base du sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs considéré, on peut effectuer cette fois un calcul de rang par **échelonnement vertical** (en utilisant des opérations élémentaires sur les colonnes).

Méthode — Déterminer une base à partir d'une famille génératrice par échelonnement vertical

Déterminer une base à partir d'une famille génératrice par échelonnement vertical

- Écrire la matrice de la famille de vecteurs dans la base canonique.
- Échelonner $\boxed{\text{par colonnes}}$ la matrice.
- Garder à chaque étape l'expression des vecteurs correspondant à chaque colonne.
- Les vecteurs non nuls obtenus à la fin de l'algorithme forment une base. Les colonnes nulles fournissent des relations de liaison. On peut aussi extraire une base de la famille de départ en exploitant ces relations.

Attention

On ne mélange pas les opérations sur les lignes et les colonnes !

Exemple 50 Déterminer par échelonnement vertical une base du sous-espace vectoriel généré par la famille de vecteurs

$$\mathscr{F} = ((1,-1,1);(-1,1,-1);(0,1,1);(1,0,2)).$$

6. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Connaître la définition d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels :
   - Savoir démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel . . . . . ☐
   - Savoir montrer qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs . ☐
2. Maitriser la notion de base :
   - Savoir montrer qu'une famille est libre . . . . . ☐
   - Savoir montrer qu'une famille est génératrice . . . . . ☐
   - Savoir montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel . . . . . ☐
   - Connaître les bases canoniques des espaces usuels . . . . . ☐
   - Savoir déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel . . . . . ☐

Exercice 1 | Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$? Version 1 Solution

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

$$E_1 = \{(a,b,a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}, \quad E = \mathbb{R}^3$$
$$E_2 = \{(a,b,1) \mid a,b \in \mathbb{R}\}, \quad E = \mathbb{R}^3$$
$$E_3 = \{(a+2,b,a) \mid a,b \in \mathbb{R}\}, \quad E = \mathbb{R}^3$$
$$E_4 = \{(2a,-a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}, \quad E = \mathbb{R}^3$$
$$E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}, \quad E = \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2 | Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$? Version 2 Solution Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(a) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = y \text{ et } 3y-2z = 0\right\}$
(b) $\{(x,2x,-x),\ x \in \mathbb{R}\}$
(c) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, xy \geq 0\right\}$
(d) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x-5y-1 = 0\right\}$
(e) $\left\{(x_k)_{k=1\cdots n} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$

Exercice 3 | Une combinaison linéaire. Solution Dans $\mathbb{R}^3$, on note $e_1 = (1,-1,2)$ et $e_2 = (1,1,-1)$. Montrer que le vecteur $e_3 = (3,1,0)$ est une combinaison linéaire de e_1 et e_2.

Exercice 4 | Combinaison linéaire ? Solution Dans $\mathbb{R}^3$, est-ce que $(5,5,1)$ est combinaison linéaire de $(2,3,0)$ et $(3,2,0)$?

Exercice 5 | Familles génératrices, version 1 Solution Pour chacun des espaces suivants, montrer que ce sont des espaces vectoriels et déterminer une famille génératrice.

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x-y = 0\}$.
2. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y-z = 0\}$.
3. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x+\ \ y+2z = 0 \\ -x+3y+\ \ z = 0 \end{cases}\right\}$.
4. $\{(2y+z, y-2x, z+x),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.

Exercice 6 | Familles génératrices, version 2. Solution Trouver une famille génératrice des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x-y+z = 0 \text{ et } y-2t = 0\right\}$
2. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax+by+z = 0\right\}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 7 | Familles génératrices, version 3. Solution

1. Trouver une famille génératrice de $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x-y-2t = 0 \text{ et } x+t = 0\}$.
2. Trouver une famille génératrice de $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x-z+t = 0 \text{ et } y+z = 0\}$.
3. Trouver une famille génératrice de $F \cap G$.

Exercice 8 | Famille libre, famille liée ? Solution

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées. Si elles sont liées, donner une relation de dépendance.

1. $((1,2,3),(3,2,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $((2,2,2),(1,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $((0,0,0),(1,2,3),(3,2,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. $((2,2,1),(1,3,1),(-2,1,3))$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9 | Base de $\mathbb{R}^3$? Solution Les familles suivantes forment-elles une base de $\mathbb{R}^3$?

1. $((1,0,1);(-1,1,0))$,
2. $((1,0,1);(-1,1,0);(1,2,1);(0,1,0))$,
3. $((1,0,1);(0,0,0);(1,0,0))$,
4. $((1,-1,0);(-2,2,0);(1,1,1))$,
5. $((1,0,0);(0,1,0);(1,1,0))$,
6. $((1,1,0);(2,2,0);(3,3,0))$.

Exercice 10 | Famille libres/génératrices ? Solution Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ?

(a) $((1,1,0),(0,1,1))$
(b) $((1,1,0),(1,0,1),(2,1,2))$
(c) $((1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,1))$
(d) $((1,2,-1,2),(1,3,2,-6))$
(e) $((1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,0,1,0),(1,-1,1,-1))$
(f) $((m,1,1),(1,m,1),(1,1,m))$, où $m \in \mathbb{R}$

Exercice 11 | Vecteurs et paramètres. Solution

1. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $v_1 = (-3,-2,-1,3)$, $v_2 = (1,0,2,4)$ et $v_3 = (1,-3,a,b)$ avec a et b des réels. Y a-t-il des valeurs de a et b pour lesquelles la famille (v_1,v_2,v_3) est liée ?
2. Soient dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs $v_1 = (1,2,3,4)$ et $v_2 = (1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1)$ soit dans $\text{Vect}(v_1,v_2)$? Même question pour $(x,1,1,y)$.
3. Soient $u = (0,1,2,3)$, $v = (3,2,1,0)$ et $w = (1,1,1,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur (x,y,z,t) soit dans $\text{Vect}(u,v,w)$.

Exercice 12 | Appartenance à un Vect. Solution Soient $u = (2,-4,7)$ et $v = (-1,2,-3)$. Peut-on trouver a tel que, dans chacun des trois cas suivants, $w \in \text{Vect}(u,v)$?

(a) $w = (-1,a,3)$ **(b)** $w = (-1,2,a)$ **(c)** $w = (-1,-1,a)$

Exercice 13 | Egalité entre espaces vectoriels. Solution Soit $F = \text{Vect}(u,v)$ avec

$$u = (1,2,1,0) \text{ et } v = (0,1,2,1)$$

$$\text{et } G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y = t-z \text{ et } x-z+2t = 0\}.$$

Montrer que F = G.

Exercice 14 | Dimension d'un espace vectoriel. Solution Pour les sous-espaces vectoriels étudiés aux exercices 1, 5 et 7 : donner base et dimension.

Exercice 15 | Coordonnées dans une base. Solution

1. Montrer que $((1,1,1);(2,1,1);(2,1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées de $(8,2,-1)$.

Exercice 16 | Extraction d'une base. Solution Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = (1,0,2)$, $v = (1,1,2)$, $w = (1,2,2)$ et $t = (2,2,2)$.

1. Montrer que la famille (u,v,w,t) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. En extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 17 | Calculs de rangs. Solution Déterminer le rang des familles suivantes :

(a) $((1,-1,1);(-1,1,-1);(0,1,1);(1,0,2))$
(b) $((2,0,m);(2,m,2);(m,0,2))$, où $m \in \mathbb{R}$

Exercice 18 | Réunion de sous-espaces vectoriels Solution Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 19 | Une équivalence Solution Soit F un sev de $\mathbb{K}^n$. Soit $(a,b,c) \in F^3$. On pose $u = b+c, \quad v = a+c, \quad w = a+b$.
Montrer que : (a,b,c) est libre $\iff$ (u,v,w) est libre.