Devoir maison n°10
à rendre le Jeudi 11/04/2024

Consignes

- Les devoirs maison sont facultatifs. Pour autant, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.**

Exercice 1 | Une égalité portant sur la dérivée seconde Solution

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x\in[0,1],\quad f(x)=\frac{1}{3}\left(-e^{-x}+\ln(1+x^2)\right).$$

1. (a) **(i)** Justifier rapidement que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$.

(ii) Déterminer f' et f''.

(iii) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f en $A=(a,f(a))$ où $a\in[0,1]$.

(b) Montrer que : $\quad \forall x\in[0,1],\quad f'(x)\geqslant \dfrac{e^{-1}}{3}$.

(c) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ de $]0,1[$ tel que $f(\ell)=0$.

2. Soit $(a,b)\in[0,1]^2$ tel que $a\neq b$. On pose φ la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x\in[0,1],\quad \varphi(x)=f(a)-f(x)-(a-x)f'(x)-\frac{1}{2}(a-x)^2\gamma,$$

où γ est un réel tel que $\varphi(b)=0$.

(a) Déterminer la constante γ.

(b) Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et donner φ'.

(c) Justifier l'existence d'un réel c compris strictement entre a et b tel que $\varphi'(c)=0$.

(d) En déduire qu'il existe un réel c compris strictement entre a et b tel que :

$$f(b)=f(a)-(a-b)f'(b)-\frac{1}{2}(a-b)^2f''(c).$$

CORRECTION

Solution (exercice 1) Énoncé

1. (a) **(i)** La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ en tant que somme et composée de telles fonctions.

(ii) Pour tout $x\in[0,1]$, après calculs :

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(e^{-x}+\frac{2x}{1+x^2}\right),$$
$$f''(x)=\frac{1}{3}\left(-e^{-x}+\frac{2\left(1-x^2\right)}{(1+x^2)^2}\right).$$

(iii) Soit $a\in[0,1]$. L'équation de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f en $A=(a,f(a))$ est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$, soit :

$$\boxed{y=\frac{1}{3}\left(e^{-a}+\frac{2a}{1+a^2}\right)(x-a)+\frac{1}{3}\left(-e^{-a}+\ln\left(1+a^2\right)\right).}$$

(b) Soit $x\in[0,1]$: comme $\dfrac{2x}{1+x^2}\geqslant 0$, on a $f'(x)\geqslant\dfrac{e^{-x}}{3}\geqslant\dfrac{e^{-1}}{3}$ (par décroissance de $x\mapsto e^{-x}$ sur $[0,1]$). Donc :

$$\boxed{\forall x\in[0,1],\quad f'(x)\geqslant\frac{e^{-1}}{3}}.$$

(c) La fonction f est une fonction continue sur $[0,1]$ et strictement croissante sur cet intervalle (pour tout $x\in[0,1], f'(x)\geqslant\dfrac{e^{-1}}{3}>0$). D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur

$$[f(0),f(1)]=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\left(-e^{-1}+\ln(2)\right)\right].$$

Comme $e^{-1}<\dfrac{1}{2}<\ln(2)$, alors $0\in]f(0),f(1)[$, et donc :

$$\boxed{\exists!\,\ell\in]0,1[,\quad f(\ell)=0.}$$

2. (a) La condition $\varphi(b)=0$ donne :

$$f(a)-f(b)-(a-b)f'(b)-\frac{1}{2}(a-b)^2\gamma=0,$$

soit :

$$\frac{1}{2}(a-b)^2\gamma=f(a)-f(b)-(a-b)^2f(b).$$

Ainsi : $\boxed{\gamma=\dfrac{2}{(a-b)^2}\left[f(a)-f(b)-(a-b)f'(b)\right]}$

(b) D'après la question 1.(a), f' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Par produit et somme de telles fonctions, φ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \cancel{-f'(x)} - (\cancel{-f'(x)} + (a-x)f''(x)) - \frac{1}{2}\big((-2)(a-x)\big)\gamma \\ &= \boxed{-(a-x)f''(x) + (a-x)\gamma}.\end{aligned}$$

(c) Remarquons que $\varphi(a) = 0$ (calcul assez direct) et que $\varphi(b) = 0$ (car la constante γ a été choisie de sorte que $\varphi(\gamma) = 0$.

- Si $a < b$, φ est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ (puisque $]a,b[\subset]0,1[$) qui vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après le théorème de ROLLE, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.
- Si $a > b$, on procède de même sur le segment $[b,a]$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe un réel } c \text{ strictement compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } \varphi'(c) = 0.}$$

(d) D'après les deux question précédentes, il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que :

$$0 = -(a-c)f''(c) + (a-c)\gamma,$$

ce qui donne $\gamma = f''(c)$ (vu que $a - c \neq 0$). Or, rappelons que :

$$\gamma = \frac{2}{(a-b)^2}\left[f(a) - f(b) - (a-b)f'(b)\right]$$

(d'après la question 2.(a)). D'où :

$$f''(c) = \frac{2}{(a-b)^2}\left[f(a) - f(b) - (a-b)f'(b)\right]$$

En isolant $f(b)$ dans l'égalité précédente, on obtient bien l'existence de $c \in]a,b[$ tel que :

$$\boxed{f(b) = f(a) - (a-b)f'(b) - \frac{1}{2}(a-b)^2 f''(c)}.$$