Chapitre # (ALG) 11 Applications linéaires

1 Généralités .....
2 Noyau et image d'une application linéaire .....
3 Isomorphismes .....
4 Théorème du rang .....
5 Représentation matricielle .....

Le premier mathématicien à avoir eu l'idée d'utiliser des coordonnées pour faire de la géométrie est René DESCARTES, *faisant ainsi le lien entre algèbre et géométrie.*

— Le saviez-vous ?

Résumé & Plan

Nous avons étudié dans un chapitre précédent la structure d'espace vectoriel, maintenant nous allons considérer des applications entre les espaces vectoriels que nous appellerons *applications linéaires* qui sera une abstraction de nombreuses applications classiques déjà connues.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ❤.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Les espaces vectoriels sont en particulier des ensembles, on peut donc tout à fait considérer des applications entre eux. Mais pour pouvoir faire des calculs tenant compte des opérations présentes sur chaque espace vectoriel, il faut compléter légèrement la définition d'application en s'inspirant des notions de « linéarité » que nous connaissons déjà.

- Dans le chapitre sur les sommes, nous avions justifié que la somme était linéaire :
  « $\sum_{k=p}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k)=\lambda\sum_{k=p}^{n}a_k+\mu\sum_{k=p}^{n}b_k$ ».
- Dans le chapitre d'intégration, nous avions justifié que l'intégration était linéaire :
  « $\int_a^b(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g$ ».
- Dans le chapitre sur les fonctions, nous avions justifié que la dérivation de fonctions était linéaire :
  « $(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'$. ».

Toutes ces propriétés disent la même chose : l'application en question (la somme, l'intégrale, la dérivée *etc.*) transforment les combinaisons linéaires en combinaisons linéaires.

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les quantités n et p désignent des entiers naturels non nuls.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Définitions et premières propriétés

Définition 1 | Application linéaire de $\mathbb{K}^p$ vers $\mathbb{K}^n$

On appelle **application linéaire** de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ toute application $f:\mathbb{K}^p\longrightarrow\mathbb{K}^n$ compatible avec la somme et avec la multiplication par un scalaire :

$$\forall(u,v)\in(\mathbb{K}^p)^2,\quad f(u+v)=f(u)+f(v),$$
$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\quad\forall u\in\mathbb{K}^p,\quad f(\lambda u)=\lambda f(u).$$

Exemple 1 **(Retour en 3ème !)** L'application $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -3x \end{array} \right.$ est linéaire car :

Exemple 2 L'application $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est-elle linéaire ?

Remarque 1 On peut démontrer que les applications linéaires $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont celles qui s'écrivent sous la forme $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array} \right.$ où $a \in \mathbb{R}$.

Définition 2 | Définition équivalente d'une application linéaire

Une application $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall (u,v) \in (\mathbb{K}^p)^2, \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Exemple 3 Démontrer plus rapidement que dans le premier exemple, que l'application $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -3x \end{array} \right.$ est linéaire.

Notation

On note :

- $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.
- Une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ est appelée **endomorphisme**. On note plus simplement $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ (au lieu de $(f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n))$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$.
- Une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}$ (une application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K})$) est appelée **forme linéaire**.

Méthode **Comment montrer qu'une application est linéaire ?**

Pour montrer qu'une application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ est linéaire, on écrira :
Soient $(u,v) \in (\mathbb{K}^p)^2$ *et* $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ *On a :*

$$f(\lambda u + \mu v) \underbrace{=}_{\text{car } \cdots} \cdots \underbrace{=}_{\text{car } \cdots} \cdots = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Donc $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *est une application linéaire.*

Exemple 4 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-2y, 3y) \end{array} \right.$. Montrer que f est linéaire.

Proposition 1 | Le neutre est envoyé sur le neutre

Soit $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application **linéaire**. Alors :

$$f(0_{\mathbb{K}^p}) = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Preuve

Exemple 5 L'application $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \right.$ est-elle linéaire ?

Méthode Montrer qu'une application n'est pas linéaire

Pour montrer qu'une application $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ n'est pas linéaire, on peut :

- vérifier si l'égalité $f(0_{\mathbb{K}^p}) = 0_{\mathbb{K}^n}$ est vérifiée *(ce qui prend en général pas plus de deux secondes)* .
- Si c'est le cas, on cherche s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathbb{K}^p$ tels que :

$$f(\lambda u + \mu v) \neq \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Exemple 6 (Applications non linéaires) Les applications ci-après ne sont pas linéaires.

1. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2, \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (x+y+z+1, z), \end{array} \right.$

2. $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y,z) & \longrightarrow & x^2+y+z. \end{array} \right.$

DEUX APPLICATIONS LINÉAIRES FONDAMENTALES. On définit ci-après l'application identité et l'application nulle.

- On note $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ l'application **identité de** $\mathbb{K}^n$. C'est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.
- On note $0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & 0_{\mathbb{K}^n} \end{array} \right.$ l'application **nulle de** $\mathbb{K}^p$ **dans** $\mathbb{K}^n$. C'est une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

Proposition 2 | Une application linéaire est caractérisée par son action sur une base

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Alors f est entièrement définie par son action sur une base de $\mathbb{K}^p$. Autrement dit, si $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et si $\left(e_1, \ldots, e_p\right)$ est une base de $\mathbb{K}^p$ de sorte que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad f(e_i) = g(e_i),$$

alors $f = g$.

Ainsi, deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Preuve

Proposition 3 | Structure d'espace vectoriel

Soit $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$f+g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \quad \text{et} \quad \lambda f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n).$$

(Vous direz, l'an prochain, que $(\mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n), +, \cdot)$ est un espace vectoriel)

Preuve

Exemple 7 On considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par :

$$f(e_1) = (-2,3), \quad f(e_2) = (0,1), \quad f(e_3) = (-1,1)$$

où $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

1.2. Opérations sur les applications linéaires

ADDITION, MULTIPLICATION PAR UNE CONSTANTE. On munit $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ d'une addition et de la multiplication externe de la façon suivante.

- **[Addition]** Pour f et g dans $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, on définit
$$f+g \; : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right.$$
- **[Multiplication externe]** Pour $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit
$$\lambda f \; : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array} \right. .$$

Exemple 8 On définit

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, 7z) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (y+2z, 3x, y-z) \end{array} \right. .$$

Montrer que f et g sont linéaires puis déterminer l'application $h = 2f - 3g$.

Proposition 4 | Composée d'applications linéaires

Soit $\mathbb{K}^p$, $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^q$ trois espaces vectoriels, $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ et $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^q$ deux applications linéaires.
Alors $g \circ f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^q$ est linéaire.

Preuve

Exemple 9 On définit

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y,7z) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (y+2z,3x,y-z) \end{array} \right. .$$

Déterminer l'expression de $g \circ f$.

Proposition 5 | Compatibilité de la composition $\circ$ avec les lois $+$ et $\cdot$

Soient $\mathbb{K}^p$, $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^q$ trois espaces vectoriels.

1. La loi $\circ$ est *distributive* par rapport à la loi $+$.
   Cela signifie que pour tout $g, h \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et pour tout $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^q)$,
   $$f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h.$$
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et pour tout $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^q)$, on a :
   $$f \circ (\lambda g) = \lambda (f \circ g).$$

Preuve

1. Pour tout $x \in \mathbb{K}^p$,
   $$\begin{aligned} f \circ (g+h)(x) &= f\left[(g+h)(x)\right] \\ &= f(g(x)+h(x)) && \text{Définition de la loi } + \\ &= f(g(x)) + f(h(x)) && \text{Par linéarité de } f \\ &= f \circ g(x) + f \circ h(x). \end{aligned}$$
   D'où : $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{K}^p$,
   $$\begin{aligned} f \circ (\lambda g)(x) &= f\left[\lambda g(x)\right] \\ &= \lambda f(g(x)) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \lambda f \circ g(x). \end{aligned}$$
   D'où : $f \circ (\lambda g) = \lambda (f \circ g)$.

Puissances d'un endomorphisme. On se place désormais dans le cas d'endomorphismes.

Définition 3 | Puissances

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$. Alors on définit par récurrence l'endomorphisme f^k pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}, \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f. \end{cases}$$
En d'autres termes : $\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$. *(Par exemple :* $f^3 = f \circ f \circ f$*)*

Remarque 2 On suppose que f est un **endo**morphisme, tout simplement pour que les composées aient un sens.

Attention Prenez garde au contexte

Pour f une fonction réelle (f définie sur $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$), f^p désigne f à la puissance p, c'est-à-dire la fonction définie pour tout nombre réel x par $f^p(x) = (f(x))^p$. Il faut donc prendre garde à l'objet que l'on manipule : par exemple, pour $p = 2$, on a, pour f un endomorphisme, $f^2(x) = f \circ f(x) = f(f(x))$ et non pas $(f(x))^2$ (car on ne peut pas en général multiplier deux vecteurs entre eux)! Prenez garde à ne pas écrire des puissances ou produits de vecteurs, qui n'ont (en général) aucun sens.

2. NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

2.1. Noyau

Définition/Proposition 1 | Noyau

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

On appelle *noyau* de f, et on le note $\mathrm{Ker}\, f$, l'ensemble :
$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in \mathbb{K}^p,\ f(x) = 0_{\mathbb{K}^n}\}.$$
C'est le sous-espace vectoriel **de** $\mathbb{K}^p$ constitué des vecteurs ayant $0_{\mathbb{K}^n}$ pour image par f. Donc, pour tout $x \in \mathbb{K}^p$:
$$x \in \mathrm{Ker}\, f \iff f(x) = 0_{\mathbb{K}^n}$$

Preuve Montrons que $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Attention

Notez bien que dans la preuve précédente, la linéarité fut **fondamentale** pour écrire pour tous $x, y \in \mathbb{K}^p$:

$$f(x) = f(y) \iff f(x-y) = 0_{\mathbb{K}^n} \iff x - y \in \operatorname{Ker} f.$$

Pas question donc de calculer des noyaux pour montrer qu'une application **NON** linéaire est injective. Par exemple, il est clair que $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas injective et pourtant son « noyau » est réduit à zéro.

Méthode Déterminer le noyau d'une application linéaire

On raisonne souvent par équivalences (en se ramenant à la résolution d'un système linéaire) en écrivant :
« Soit $u \in \mathbb{K}^p$. Alors $u \in \operatorname{Ker}(f) \iff f(u) = 0_{\mathbb{K}^n} \iff \cdots$

Exemple 10 Déterminer le noyau de l'application linéaire $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, y-2z, x-z) \end{array} \right.$. L'application f est-elle injective ?

Proposition 6 | Caractérisation de l'injectivité pour les applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Alors :

$$f \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$$

Preuve

2.2. Image

Définition/Proposition 2 | Image

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

On appelle **image** de f, et on note $\operatorname{Im} f$, le sous-espace de $\mathbb{K}^n$ (espace d'arrivée) constitué des vecteurs qui sont images d'un vecteur de $\mathbb{K}^p$ par f :

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{K}^p\}$$

Ainsi, pour $y \in \mathbb{K}^n$:

$$y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x \in \mathbb{K}^p,\ y = f(x).$$

Preuve Montrons que $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 7 | Caractérisation de la surjectivité

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

$$f \text{ est surjective} \iff \operatorname{Im}(f) = \mathbb{K}^n.$$

Preuve Il n'y a rien à faire, c'est une conséquence du cours sur les applications.

Proposition 8 | Trouver une image à l'aide d'un Vect

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. On note $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$ *(en général la base canonique de $\mathbb{K}^p$)* . Alors :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(f(e_1), \cdots, f(e_p)\right)$$

Preuve

Méthode Déterminer l'image d'une application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$

⋆ **[Méthode 1]** On peut raisonner par équivalences (en se ramenant à la résolution d'un système linéaire : les conditions de compatibilité donnent l'image) en écrivant :

$$\textit{Soit } v \in \mathbb{K}^n, \textit{ alors : } v \in \operatorname{Im} f \iff \exists u \in \mathbb{K}^p, f(u) = v \iff \cdots$$

Dans ce cas, on doit ensuite passer de l'écriture cartésienne à l'écriture paramétrique de l'image afin d'obtenir une base et la dimension de $\operatorname{Im} f$.

⋆ **[Méthode 2]** On peut dire que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(f(e_1), \cdots, f(e_p)\right)$ où $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\mathbb{K}^p$ (la base canonique par exemple).
Comme $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ n'est pas nécessairement une famille libre, on doit

ensuite en extraire une base afin d'obtenir la dimension de Im f (si demandé).

Exemple 11 Pour chaque application linéaire :
- Déterminer son image suivant deux méthodes,
- déterminer si elle est surjective.

1. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-y, x+2y+z) \end{array} \right.$

2. $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x+y, x-y, y) \end{array} \right.$

Résumé

On retient donc :
- le noyau est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ, une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul,
- l'image est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée, une application linéaire est surjective si et seulement si son image est l'espace d'arrivée.

Exemple 12 Soient f et g les deux applications linéaires suivantes :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right. .$$

Les applications linéaires f et g sont-elles surjectives, injectives, bijectives ?

Exemple 13 **(Noyau et image d'applications linéaires fondamentales.)**

- $\mathrm{Im}\left(0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)}\right) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $\mathrm{Ker}\left(0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)}\right) = \mathbb{K}^p$.
- $\mathrm{Im}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p}\right) = \mathbb{K}^p$, $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p}\right) = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$.

3. ISOMORPHISMES

3.1. Définitions et premières propriétés

Définition 4 | Isomorphisme

On appelle *isomorphisme* entre $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ toute **application linéaire bijective** de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

Nous verrons que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ ne peut être bijective que si $p = n$.

Définition 5 | Groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$

L'ensemble des isomorphismes de $\mathbb{K}^n$ est noté $\mathscr{GL}(\mathbb{K}^n)$, et appelé *groupe linéaire sur* $\mathbb{K}^n$.

morphisme	=	application linéaire	
ENDOmorphisme	=	application linéaire	+ ENTRE MÊMES ESPACES
ISOmorphisme	=	application linéaire	+ BIJECTIVE

On rappelle que, si E et F sont deux ensembles, une application bijective $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ (*i.e.* injective et surjective de E dans F) possède une application inverse $f^{-1} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ (la bijection réciproque de f), *i.e.* satisfaisant :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}, \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}.$$

Si l'application de départ est linéaire, on montre que l'inverse l'est aussi comme le précise la proposition ci-après.

Proposition 9 | f^{-1} est linéaire

Soit $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application linéaire. Si f est un isomorphisme, alors sa réciproque $f^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est linéaire (c'est donc également un isomorphisme).

Preuve

Proposition 10 | Composée d'isomorphisme = isomorphisme

Si $f \in \mathcal{GL}(\mathbb{K}^n)$ et $g \in \mathcal{GL}(\mathbb{K}^n)$ sont deux isomorphismes alors $g \circ f \in \mathcal{GL}(\mathbb{K}^n)$ est un isomorphisme et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve On a déjà vu que la composée d'applications linéaires est linéaire, et la formule de l'inverse d'une composée a été prouvée dans le chapitre sur les applications en début d'année.

3.2. Isomorphismes et bases

Théorème 1 | Caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire par l'image d'une base

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$.

1. f est surjective de $\mathbb{K}^p$ sur $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $\big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.
2. f est injective sur $\mathbb{K}^p$ si et seulement si $\big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$.
3. f est un isomorphisme de $\mathbb{K}^p$ sur $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $\big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Preuve

1.

2.

3. Réunion des deux points précédents.

3.3. Isomorphismes et dimension

Théorème 2 | Effet d'un isomorphisme sur la dimension
Si il existe un isomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, alors $p = n$.

Preuve

Exemple 14 (Autour du théorème précédent)
- Si m et n sont deux entiers naturels non nuls tels que $m \neq n$, alors il n'existe pas d'isomorphisme entre $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ (puisque leurs dimensions ne sont pas égales).
- La réciproque est fausse : toute application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ n'est pas forcément un isomorphisme (penser par exemple à l'application linéaire nulle qui n'est pas bijective, car elle est pas injective ni surjective).

Moralement, cela signifie que seuls les endomorphismes peuvent être bijectifs (mais attention : tous les endomorphismes ne sont pas bijectifs !)

4. THÉORÈME DU RANG

4.1. Rang d'une application linéaire

Définition 6 | Rang d'une application linéaire
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.
On appelle **rang** de f la dimension de l'image de f, et on note $\mathrm{Rg}(f)$ cet entier naturel :

$$\mathrm{Rg}(f) = \dim \mathrm{Im}\, f.$$

Remarque 3 (Lien entre les différentes notions de rang.) Encore une notion de rang ! Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ avec $\mathbb{K}^p$ de base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Rg}(f) &= \dim[\mathrm{Im}(f)] \\ &= \dim\left[\mathrm{Vect}\left(f(e_1), \dots, f\left(e_p\right)\right)\right] \\ &= \mathrm{Rg}\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right). \end{aligned}$$

D'après la Définition/Proposition 8

Définition du rang d'une famille de vecteurs, voir Chapitre sur les espaces vectoriels

Remarque 4 Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ *(avec $\mathbb{K}^p$ de base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$)* , on a :
- $\mathrm{Rg}(f) \leq n$.
- $\mathrm{Rg}(f) \leq p$.

Exemple 15 On pose $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, x+2y+z, 2x+y+2z) \end{array} \right.$.
Déterminer le rang de f.

Théorème 3 | Théorème du rang

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$. Alors :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{K}^n.$$

Ce qui se réécrit :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{Rg}(f) = n.$$

*(Bien mettre la dimension de l'espace de **départ** dans le membre de droite.)*

Preuve Admis (conformément au programme officiel)

Proposition 11 | Lien entre rang et surjectivité

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. On a :

(i) f est surjective $\iff$ **(ii)** $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{K}^n \iff$ **(iii)** $\operatorname{Rg}(f) = n$.

Preuve L'équivalence **(i)** $\iff$ **(ii)** a déjà été démontrée.
Démontrons que **(ii)** $\iff$ **(iii)**.

Remarque 6 Le théorème du rang permet d'obtenir la dimension de l'image si on connaît la dimension du noyau, ou, inversement, la dimension du noyau si on connaît la dimension de l'image. Ainsi, si on connaît le noyau, on connaît un peu l'image, et vice versa.

Exemple 16 On pose $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, x+2y+z, 2x+y+2z) \end{array} \right.$.
Montrer que le théorème du rang est vérifié pour cet endomorphisme.

Remarque 5 (Rang de l'application nulle) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Alors :

$$\operatorname{Rg}(f) = 0 \iff f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)}.$$

Exemple 17 **(Un exercice théorique)** Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de sorte que $f \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

1. Montrer que : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
2. En utilisant le théorème du rang, déterminer $\dim \text{Im}(f)$ et $\dim \text{Ker}(f)$.

Exemple 18 Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est une application linéaire injective, alors :

Théorème 4 | Applications linéaires entre espaces de même dimension finie

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$. Alors :

(i) f est bijective $\iff$ **(ii)** f est injective $\iff$ **(iii)** f est surjective.

Preuve

Remarque 7 Le résultat du théorème précédent est d'importance capitale dans la pratique : il permet, pour les applications linéaires, de ramener l'étude de bijectivité à celle d'injectivité (souvent facile) ou de surjectivité.

Proposition 12 | Rang et injectivité

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Alors :

f est injective $\iff \text{Rg}(f) = p$.

Preuve

Exemple 19 Montrer que l'application linéaire $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x+y) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

5. REPRÉSENTATION MATRICIELLE

5.1. Matrice d'un vecteur dans une base

Définition 7 | Matrice d'un vecteur

Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$. Soit x un vecteur de $\mathbb{K}^n$ de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, *i.e.* :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

- On appelle *matrice du vecteur x relativement à la base $\mathscr{B}$* la matrice **colonne** suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

- Si on dispose $\mathbb{K}^n$ de sa base canonique $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$, on dit que $\underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(x)$ est la *matrice canoniquement associée à x*.

De manière générale, toutes les notions de matrice qui suivront dépendront (fortement!) du choix d'une base.

Remarque 8 De manière réciproque, la donnée d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ et d'un vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définit un unique vecteur x tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Il s'agit du vecteur $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

Exemple 20 Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $x = -e_2$, écrire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.

5.2. Matrice associée à une application linéaire

Définition 8 | Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$.
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.
Comme la famille $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ on peut décomposer les vecteurs $(f(e_k))_{k\in[\![1,p]\!]}$ dans la base $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{1,1}\varepsilon_1 + a_{2,1}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n,1}\varepsilon_n, \\ f(e_2) &= a_{1,2}\varepsilon_1 + a_{2,2}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n,2}\varepsilon_n, \\ &\vdots \\ f(e_p) &= a_{1,p}\varepsilon_1 + a_{2,p}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n,p}\varepsilon_n. \end{aligned}$$

On définit alors la **matrice de f de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{C}$** par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Lorsque $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, la matrice précédente est dite **canoniquement associée à f**.

Ainsi, si l'on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, alors la i-ième colonne (pour $i \in [\![1\,,\,p]\!]$) contient les coordonnées de $f(e_i)$ relativement à la base $\mathscr{C}$.

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_i \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \star & \cdots & a_{1,j} & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \star & \cdots & a_{n,j} & \cdots & \star \end{pmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix}$$

(avec $f(e_1)$, $f(e_j)$, $f(e_p)$ au-dessus des colonnes)

On retiendra que :

nombre de LIGNES	=	dimension de l'espace d'ARRIVÉE
nombre de COLONNES	=	dimension de l'espace de DÉPART

Remarque 9

- La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ dépend fortement du choix de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, si on prend d'autres bases on obtient une autre matrice.
- En première année on se limitera la plupart du temps aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

- Si f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$, on note plus simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.
- Moralement, une application linéaire est parfaitement définie par sa matrice dans deux bases données car une application linéaire est entièrement définie par son action sur une base.

Méthode **Pour obtenir** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$

Il s'agit simplement de calculer $f(e_1),\cdots,f(e_p)$ puis de déterminer les coordonnées dans la base $\mathscr{C}$ des vecteurs obtenus. On écrit ensuite les vecteurs colonnes de coordonnées verticalement pour former la matrice recherchée.

Exemple 21 Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}^3$, $\mathrm{F}=\mathbb{R}^4$, $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}'=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+2z,2x-y,3x+5y+2z,4x+y-2z) \end{array} \right.$$

Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\varphi)$.

Exemple 22 **(Attention aux chois des bases)**
Soit $\mathscr{B}=((1,0);(1,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\mathscr{C}=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Notons $f_1=(1,0,0);f_2=(1,1,0);f_3=(1,1,1)$ et $\widetilde{\mathscr{C}}=(f_1,f_2,f_3)$.
Soit l'application linéaire

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-2y,0) \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\widetilde{\mathscr{C}}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\widetilde{\mathscr{C}}}(f)$.

Exemple 23 Donner les matrices, dans les bases canoniques, des applications

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (2x+y+t,x-y-z,3x-3y+z+t) \end{array} \right.$$

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-2y, 0) \end{array} \right.$$

Proposition 13 | Matrice de l'application identité

Pour toute base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^p$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p}) = \mathrm{I}_p$.

C'est de là que la matrice I_p tire son nom de « matrice identité ».

Preuve

5.3. Lien entre opérations sur les applications linéaires et opérations sur les matrices

Théorème 5 | Écriture matricielle de $y = u(x)$

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{K}^p$, $\mathscr{C}$ une base de $\mathbb{K}^n$ et soit $x \in \mathbb{K}^p$. Alors :

$$\underbrace{\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(f(x))}_{\text{« matrice d'un vecteur »}} = \underbrace{\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(f)}_{\text{« matrice d'une app. »}} \times \underbrace{\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x)}_{\text{« matrice d'un vecteur »}}.$$

Autrement dit, l'égalité $\boxed{y = f(x)}$ se retranscrit matriciellement comme étant $\boxed{\mathrm{Y} = \mathrm{AX}}$, où on a posé

$$\mathrm{Y} = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(y) \quad \mathrm{A} = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(f), \quad \mathrm{X} = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x).$$

Preuve On explicite les bases de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$: $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$. Posons :

$$\mathrm{Y} = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,1} & \cdots & u_{n,p} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Alors on calcule :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i f_i = y = f(x) = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} u_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} u_{i,j} x_j\right) f_i.$$

Par unicité des coordonnées de y dans la base $\mathscr{C}$, on en déduit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} u_{i,j} x_j \iff \mathrm{Y} = \mathrm{A} \times \mathrm{X}.$$

Remarque 10 Ainsi pour calculer $f(x)$, où $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, si on connaît M sa matrice dans la base canonique, il suffit de calculer MX où X est le vecteur x « écrit en colonne ». Alors, $f(x)$ est « égal » à MX (en fait, plus rigoureusement, $f(x)$ est un vecteur ligne et non colonne, on a $f(x) = (\mathrm{MX})^{\mathrm{T}}$).

Exemple 24 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculer $f(1,1,1)$.

Exemple 25 Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

puis le noyau et l'image de cette application.

Proposition 14 | Matrice de $f+g$

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$, $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)^2$. ALors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$$

Preuve Immédiat en calculant $(f+g)(e_j)$ avec $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_i$ et $g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\varepsilon_i$.

Proposition 15 | Matrice de λf

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$, $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

Preuve Immédiat en calculant $(\lambda f)(e_j)$ avec $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$.

Exemple 26 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$, où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. Donner la matrice de $f + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ dans la base canonique.

Proposition 16 | Matrice de $g \circ f$

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$, $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{D} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ une base de $\mathbb{K}^q$ et $(f, g) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \times \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^q)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).$$

Preuve

Notons $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{B}}(g) \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Notons : $\mathrm{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_k) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$ avec $f(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\varepsilon_i$

Et : $\mathrm{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g(\alpha_1) & \cdots & g(\alpha_j) & \cdots & g(\alpha_r) \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pr} \end{pmatrix} \end{array}$ avec $g(\alpha_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} e_k$

On cherche : $\mathrm{C} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(f \circ g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \cdots & & \cdots & \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nr} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathrm{M}_{nr}(\mathbb{K})$,

avec $(f \circ g)(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\varepsilon_i$. On a :

$$(f \circ g)(\alpha_j) = f(g(\alpha_j)) = f\left(\sum_{k=1}^{p} b_{kj} e_k\right)$$

$$(f \circ g)(\alpha_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} f(e_k)$$

$$(f \circ g)(\alpha_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\varepsilon_i\right)$$

$$(f \circ g)(\alpha_j) \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\varepsilon_i\right)$$

$$(f \circ g)(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\varepsilon_i \quad \text{(en échangeant les sommes)}$$

$$(f \circ g)(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right)\varepsilon_i$$

On obtient ainsi : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$ et on reconnaît : $\boxed{\mathrm{C} = \mathrm{A} \times \mathrm{B}}$

Proposition 17 | Cas particulier des endomorphismes : matrice de f^n

Soient $\mathbb{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p)$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ \cdots \circ f) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^n.$$

Preuve Il s'agit d'un corollaire direct de la propriété de traduction matricielle d'une composée d'applications linéaires (par récurrence).

Exemple 27 Soient

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y - 2z, -x + 3y - z) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - y, x + 3y) \end{array} \right. .$$

1. Déterminer l'expression de $g \circ f$ de façon analytique.
2. Déterminer l'expression de $g \circ f$ grâce à un calcul matriciel.
3. Déterminer l'expression de g^3 grâce à un calcul matriciel.

On en déduit maintenant facilement que la matrice de u^{-1}, si u est un isomorphisme, est l'inverse de la matrice de u.

Proposition 18 | Matrice d'une application inverse

Soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$

- Alors : f est bijective $\iff$ $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$ est inversible.
- Dans ce cas, on a : $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}\left(f^{-1}\right) = \left[\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right]^{-1}$.

Preuve

Exemple 28 Soit l'application linéaire

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 3x+5y+4z, 2x+y+5z) \end{array} \right. .$$

En utilisant la matrice canoniquement associée à f, justifier que f est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

Résumé **Traductions matricielles : résumé**

Moralement :

- $y = f(x)$ se traduit par $Y = AX$
- $f + g$ se traduit par $A + B$
- λf de traduit par λA
- $g \circ f$ se traduit par BA
- $f \circ f$ se traduit par A^2
- $f \circ \cdots \circ f$ se traduit par A^n
- f bijective $\iff$ A inversible et f^{-1} se traduit par A^{-1}

5.4. Lien entre toutes les différentes notions de rang

Exemple 29 Soit $\mathscr{F}$ la famille de vecteurs $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}\right)$.

Alors le rang de la famille $\mathscr{F}$ est égal au rang de la matrice $A = \begin{pmatrix}2 & 4 & 4\\1 & 1 & 3\\4 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Il est également égal au rang du système linéaire

$$(S) : \begin{cases} 2x + 4y + 4z = c_1 \\ x + y + 3z = c_2 \\ 4x + 2y + 3z = c_3 \end{cases}$$

et au rang de l'application linéaire

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x,y,z & \longmapsto & \begin{pmatrix}2x+4y+4z\\x+y+3z\\4x+2y+3z\end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

D'ailleurs, la matrice associée à (S) est la matrice A, et la matrice de f dans la base canonique est A. On a en résumé

$$\mathrm{Rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(S) = \mathrm{Rg}(f).$$