Devoir maison n°11

à rendre le Mardi 21/05/2024

Consignes

- Les devoirs maison sont facultatifs. Pour autant, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.**

Exercice 1 | Quelques sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ Solution

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ et les vecteurs

$$a = (2, -1, 1, 0) \quad b = (-1, 2, -2, 1) \quad c = (-2, 2, -3, 1)$$

$$d = (1, 4, -2, 2) \quad e = (8, 2, 5, 1).$$

1. Etudier si la famille (c, d, e) est libre. Si ce n'est pas le cas, chercher une relation entre les vecteurs de cette famille.
2. Montrer que la famille (a, b, c, d) est une base de E .
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs c , d et e dans la base de la question précédente.
4. Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - z - t = 0 \quad \text{et} \quad y - 2t = 0\}$. (On dit que G est décrit à l'aide d'équations linéaires.)
 - (a) Écrire en Python une fonction `est_dans_G` qui prend en argument une liste L de longueur 4 puis qui renvoie `True` si le vecteur $(L[0], L[1], L[2], L[3])$ appartient à G et `False` sinon.
 - (b) Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E . En donner une base et la dimension.
 - (c) Démontrer que $c \in G$. Donner une base de G contenant le vecteur c .

5. Soit $F = \text{Vect}(c, d)$ et $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad y - 2t = 0 \quad \text{et} \quad -4x + 5z + 7t = 0\}$. On admet que H est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 (ce qui se démontre facilement à l'aide de la « méthode Vect »).
 - (a) Justifier que $F \subset H$.
 - (b) Montrer que $F = H$ en utilisant un argument de dimension.
6. Déterminer une base de $F \cap G$ (en vous aidant des représentations à l'aide d'équations linéaires) et en déduire $\dim(F \cap G)$.
7. L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Justifier.

Solution (exercice 1) Énoncé

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 c + \lambda_2 d + \lambda_3 e = 0_{\mathbb{R}^4}$. On obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 (\text{S}) : & \begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \mathbf{L}_1 \leftarrow \mathbf{L}_4 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 & \mathbf{L}_2 \leftarrow \mathbf{L}_2 - 2\mathbf{L}_1 \\ 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 & \mathbf{L}_3 \leftarrow \mathbf{L}_3 + 3\mathbf{L}_1 \\ 5\lambda_2 + 10\lambda_3 = 0 & \mathbf{L}_4 \leftarrow \mathbf{L}_4 + 2\mathbf{L}_1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant par exemple $\lambda_3 = 1$ (qui joue ici le rôle d'inconnue secondaire), on obtient la relation de liaison :

$$3c - 2d + e = 0_{\mathbb{R}^4}$$

On en déduit que : la famille (c, d, e) est une famille liée.

2. On sait que $E = \mathbb{R}^4$ est un espace vectoriel de dimension 4. Ainsi pour montrer que (a, b, c, d) est une base de E , il suffit de montrer qu'elle est libre puisqu'elle a 4 vecteurs dans un espace de dimension 4. Vérifions donc que la famille (a, b, c, d) est bien une famille libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d = 0_{\mathbb{R}^4}$. On obtient ainsi le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 (\text{S}) : & \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 & \mathbf{L}_1 \leftrightarrow \mathbf{L}_3 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 & \mathbf{L}_2 \leftarrow \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_1 \\ 3\lambda_2 + 4\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 & \mathbf{L}_3 \leftarrow \mathbf{L}_3 - 2\mathbf{L}_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 & \mathbf{L}_2 \leftrightarrow \mathbf{L}_4 \\ 3\lambda_2 + 4\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ +\lambda_3 - \lambda_4 = 0 & \mathbf{L}_3 \leftarrow \mathbf{L}_3 - 3\mathbf{L}_2 \\ -\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_4 = 0 & \mathbf{L}_4 \leftarrow \mathbf{L}_4 + \mathbf{L}_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. La famille (a, b, c, d) est une famille libre de $4 = \dim \mathbb{R}^4$ vecteurs donc (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^4$.

3. On se place dans la base (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$:

- Comme $c = 0a + 0b + 1c + 0d$, on obtient que les coordonnées de c dans la base (a, b, c, d) sont $(0, 0, 1, 0)$
- Comme $d = 0a + 0b + 0c + 1d$, on obtient que les coordonnées de d dans la base (a, b, c, d) sont $(0, 0, 0, 1)$
- Etude pour e : on cherche les coefficients $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$e = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d$$

(on sait de toute façon que de tels coefficients existent bien car (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^4$ et on sait même qu'ils sont uniques). Or on a vu à la première question que $e = -3c + 2d$. Ainsi, les coordonnées de e dans la base (a, b, c, d) sont $(0, 0, -3, 2)$ (il n'est pas nécessaire de résoudre un nouveau système ici 😊)

4. (a)

```
def est_dans_G(L):
    if L[0] - L[2] - L[3] == 0 and L[1] - 2*L[3] == 0 :
        return True
    else :
        return False
```

Version plus compacte :

```
def est_dans_G(L):
    return L[0] - L[2] - L[3] == 0 and L[1] - 2*L[3] \
    ↪ == 0
```

(b) Utilisation la « méthode Vect » :

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - z - t = 0 \quad \text{et} \quad y - 2t = 0\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x = z + t \quad \text{et} \quad y = 2t\} \\ &= \{(z + t, 2t, z, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{z(1, 0, 1, 0) + t(1, 2, 0, 1), (z, t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 1, 0); (1, 2, 0, 1)) \end{aligned}$$

Ainsi, G est un sous-espace vectoriel de E .

La famille $\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0); (1, 2, 0, 1))$ est libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires) et génératrice (par définition) de G donc $\mathcal{B}$ est une base de G et on en déduit que $\dim G = 2$.

(c) Comme $-2 - (-3) - 1 = 0$ et que $2 - 2 \times 1 = 0$, on vient de montrer que les coordonnées de c vérifient bien les deux équations cartésiennes de G et ainsi $c \in G$.

On cherche une base de G contenant le vecteur c . Comme on a démontré à la question précédente que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2, il suffit de trouver une famille libre ayant deux vecteurs dont un des vecteurs est c . Posons $u = (1, 0, 1, 0)$. On sait que $u \in G$, et que la famille (u, c) est libre, car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. On a donc (u, c) est une base de G .

5. (a) Rappelons que $c = (-2, 2, -3, 1)$ et que $d = (1, 4, -2, 2)$, montrons que les coordonnées de c et de d vérifient les équations définissant l'ensemble H :

- $2 - 2 \times 1 = 0$ et $-4 \times (-2) + 5 \times (-3) + 7 \times 1 = 0$, donc : $c \in H$
- $4 - 2 \times 2 = 0$ et $-4 \times 1 + 5 \times (-2) + 7 \times 2 = 0$, donc : $d \in H$.

H étant un espace vectoriel, on en déduit (Proposition 10 du cours) que : $\text{Vect}(c, d) \subset H$, soit : $F \subset H$

(b) La famille (c, d) est libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires) et génératrice de F (par définition de F) donc (c, d) est une base de F et $\dim F = 2$. Ainsi :

$$\begin{cases} F \subset H \\ \dim F = \dim H \end{cases} \quad \text{donc par inclusion et égalité des dimensions : } F = H$$

6. On a :

$$F \cap G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad y - 2t = 0 \quad \text{et} \quad -4x + 5z + 7t = 0 \quad \text{et} \quad x - z - t = 0\}$$

Ainsi, on a (en effectuant l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1$ lors de la deuxième équivalence) :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F \cap G &\iff \begin{cases} x & - z - t = 0 \\ -4x & + 5z + 7t = 0 \\ & y & - 2t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x & - z - t = 0 \\ & z + 3t = 0 \\ & y & - 2t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x & = -2t \\ & z & = -3t \\ & y & = 2t \end{cases} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x = -2t \quad \text{et} \quad y = 2t \quad \text{et} \quad z = -3t\} \\ &= \{(-2t, 2t, -3t, t), t \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((-2, 2, -3, 1)). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$F \cap G = \text{Vect}((-2, 2, -3, 1)).$$

Le vecteur $(-2, 2, -3, 1)$ est générateur de $F \cap G$, il est non nul donc il est aussi une famille libre et ainsi $(-2, 2, -3, 1)$ forme une base de $F \cap G$ et $\dim(F \cap G) = 1$.

7. Rappelons que l'ensemble $F \cup G$ est l'ensemble des vecteurs appartenant à F ou à G . Montrons que $F \cup G$ n'est pas stable par addition.

On sait que $c \in F$ (avec $c = (-2, 2, -3, 1)$) donc $c \in F \cup G$.

Notons $v = (1, 2, 0, 1)$. On sait que $v \in G$, donc $v \in F \cup G$.

Notons $w = c + v$, de sorte que $w = (1, 4, -3, 2)$. Les coordonnées de w ne vérifient ni la condition $-4 \times 1 + 5 \times (-3) + 7 \times 2 = 0$ (donc $w \notin F$), ni la condition $1 - (-3) - 2 = 0$ (donc $w \notin G$), donc $w \notin F \cup G$. Ainsi :

$$F \cup G \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } E = \mathbb{R}^4$$