Concours blanc # 1

02/05/2024 – Durée : 3h00

Consignes. *Le sujet est constitué de **deux problèmes indépendants**. Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.*

*Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant, en les surlignant ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'usage de la calculatrice est strictement **interdit**.*

Les abus suivants (entre autres!) entrainent la note de $\boxed{0/4}$ en rédaction :

- variables non quantifiées : que désigne x ? Que désigne n ? *(ce n'est pas au correcteur de deviner dans quels ensembles vivent vos variables!)*
- « la fonction $f(x)$ »,
- utiliser la formule des probabilités totales sans citer le système complet d'évènements associé.

Bon courage 🙂

Problème 1 | Matrices magiques et tirages aléatoires dans une urne. [Solution]

Notations et définitions. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **magique** si et seulement si les sommes des coefficients sur chaque ligne de M sont égales. Dans ce cas, cette somme est notée $\sigma(M)$. Par exemple :

- la matrice $H = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$ est magique avec $\sigma(H) = 13$ car les sommes sur chaque ligne valent 13 ;
- la matrice $K = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ n'est pas magique car, par exemple, $3+1+5 \neq 2+4+8$.

Ce problème, découpé en trois parties largement indépendantes, consiste en l'étude des propriétés des matrices magiques et leur mise en contexte dans une expérience aléatoire.

La première partie consiste en une analyse informatique des matrices magiques. La seconde partie établit des propriétés générales sur les matrices magiques. La troisième partie décrit une expérience aléatoire en lien avec les matrices magiques.

PARTIE I — MODÉLISATION INFORMATIQUE. On modélise informatiquement une matrice par un tableau `numpy`. Pour rappel :

```
>>> import numpy as np
>>> K = np.array([[3,1,5],[2,4,8],[6,9,7]])
```

permet de définir informatiquement la matrice K introduite précédemment.

Pour $i, j \in [\![0, n-1]\!]$, la ligne d'indice i d'une matrice M carrée de taille n est appelée par la syntaxe `M[i]` et le coefficient d'indices i, j par la syntaxe `M[i,j]`.

On rappelle enfin que la fonction `np.shape(M)` renvoie le tuple `(n,p)` correspondant à la taille d'une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (où n et p sont deux entiers naturels non nuls).

1. Écrire une fonction `somme(L)` qui renvoie la somme des éléments d'une liste `L` de flottants (ou d'entiers). *On s'interdira bien entendu d'utiliser la fonction `sum` existante sur les listes.*
2. Écrire une fonction `sommeLigne(M,i)`, où M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $i \in [\![0, n-1]\!]$, qui renvoie la somme de tous les coefficients de la ligne d'indice i de la matrice M.
3. Écrire une fonction `magique(M)` renvoyant le booléen `True` si une matrice carrée M est magique, et `False` sinon.

PARTIE II — GÉNÉRALITÉS SUR LES MATRICES MAGIQUES. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices magiques et λ un nombre réel.

4. Dans les deux sous-questions suivantes, on demande une justification sobre, en quelques lignes.
   - **(a)** Justifier que $A+B$ est magique et préciser $\sigma(A+B)$ en fonction de $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$.
   - **(b)** Justifier que λA est magique et préciser $\sigma(\lambda A)$ en fonction de λ et $\sigma(A)$.
5. On pose $C = AB$. On note $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. On rappelle alors que la matrice C a pour coefficient général
$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$
Montrer que la matrice C est magique et préciser $\sigma(C)$ en fonction de $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$.

PARTIE III — UNE EXPÉRIENCE ALÉATOIRE. Dans toute la suite de ce problème, a, b, c et d désignent des entiers naturels.

On considère une expérience aléatoire que l'on suppose modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et qui nécessite le matériel suivant :

- Une urne de taille infinie contenant initialement une boule noire et une boule blanche.
- Un stock infini de boules noires.
- Un stock infini de boules blanches.

Cette expérience aléatoire consiste à tirer successivement et indéfiniment une boule dans l'urne de façon aléatoire (les boules sont supposées indiscernables au toucher). À chaque étape, on note la couleur de la boule tirée, on la replace dans l'urne et on ajoute d'autres boules selon une règle fixée pendant toute l'expérience : si on a tiré une boule noire, on ajoute dans l'urne a boules noires et b boules blanches, si on a tiré une boule blanche, on ajoute c boules noires et d boules blanches.

Cette règle est résumée par la matrice ci-dessous dite « matrice d'ajout » :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Lorsque $a + b = c + d$, on notera $\sigma(A)$ cette valeur commune (et on dira que la matrice d'ajout A est magique).

6. Dans cette question uniquement, on suppose que :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) À une certaine étape, l'urne contient 3 boules noires et 5 blanches et on tire une boule noire. Quelle est la composition de l'urne à l'étape suivante ?

(b) Calculer $\sigma(A)$. Que représente $\sigma(A)$? Est-il possible qu'à une certaine étape, il y ait 22 boules blanches et 20 boules noires (justifier votre réponse) ?

(c) Montrer que A est inversible, que A^{-1} est magique et exprimer $\sigma\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $\sigma(A)$.

7. On fixe $s \in \mathbb{N}^\star$ et on réalise l'expérience aléatoire précédemment décrite dans le cas où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note B_n et N_n les évènements :

- B_n : « la boule tirée au n-ième tirage est blanche »,
- N_n : « la boule tirée au n-ième tirage est noire »,

de sorte que $N_n = \overline{B_n}$.

(a) Déterminer $\mathbb{P}(B_1)$ et $\mathbb{P}(N_1)$.

(b) Calculer $\mathbb{P}(B_2)$. Quelle conjecture peut-on faire sur la suite $(\mathbb{P}(B_n))_{n\geq 1}$? *(On ne cherchera pas à démontrer cette conjecture)*

(c) Si l'on a tiré une boule blanche au deuxième tirage, quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule blanche au premier tirage ?

(d) Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

(e) Déterminer la probabilité p_n de ne tirer que des boules blanches lors des $n \in \mathbb{N}^\star$ premiers tirages *(on exprimera le résultat sous la forme d'un produit que l'on ne cherchera pas à simplifier)*.

(f) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \ln(p_n) \leq -\ln(2 + (n-1)s)$, puis en déduire : $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter.

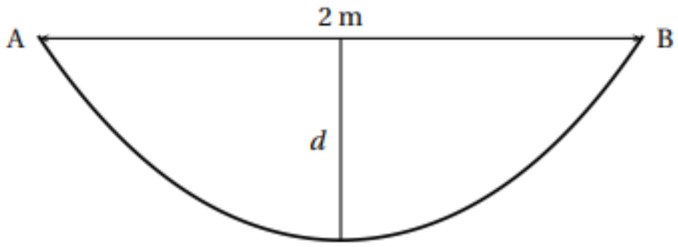
PROBLEME N°2 :

On admet que si on tend un câble entre deux poteaux, le câble n'étant soumis qu'à son propre poids et accroché des deux côtés à la même hauteur, alors il prend la forme d'une chaînette, c'est-à-dire une courbe d'équation de la forme : $y = \frac{e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}}{2\lambda}$ avec $\lambda > 0$.

On laisse pendre un tel fil d'une longueur de 4 m entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 m.

On considère pour tout $\lambda > 0$ la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = \frac{e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}}{2\lambda}$.

On note C_λ la courbe représentative de la fonction f_λ dans un repère orthonormé.



On notera dans ce sujet les fonctions $ch : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ et $sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

La fonction ch est appelée fonction cosinus hyperbolique.
La fonction sh est appelée fonction sinus hyperbolique.

A. Etude de la chaînette

Partie I.

1. Etudier la parité de la fonction f_λ.
2. Déterminer la limite de f_λ en $+\infty$.
3. Etudier les variations de f_λ sur $[0; +\infty[$. En déduire le tableau de variations de f_λ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer le développement limité de f_λ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Partie II.

On admet que la longueur $L(\lambda)$ de l'arc de courbe d'équation $y = f_\lambda(x)$ compris entre les points d'abscisses -1 et 1 est égale à l'intégrale : $L(\lambda) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(f_\lambda{}'(x)\right)^2}\, dx$ (l'unité de longueur étant le m).

1. Vérifier que pour tout $x \in [-1; 1]$, $1 + \left(f_\lambda{}'(x)\right)^2 = ch^2(\lambda x)$.
2. En déduire que $L(\lambda) = \frac{2}{\lambda} sh(\lambda)$.

B. Etude de l'équation $L(\lambda) = 4$

Soit λ un nombre réel strictement positif.

Partie I.

1. Résoudre l'équation, d'inconnue X réelle, $X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$.
2. En déduire que $L(\lambda) = 4$ équivaut à $\lambda = ln\left[2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}\right]$.
3. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$.
   a. Justifier rigoureusement la dérivabilité de la fonction g sur $[0; +\infty[$.
   b. Prouver que pour $x \in [0; +\infty[,\ g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$.
   En déduire le sens de variation de g.

Partie II.

Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = x - g(x)$.

1. Etudier le signe de $h'(x)$ sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de $h(x)$ en $+\infty$.
   On pourra au préalable justifier que pour tout $x > 0, g(x) = ln(x) + ln\left(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right)$.
3. Dresser le tableau de variation complet de la fonction h.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique, notée α, sur $]0; +\infty[$.
   On admet que $2 \leq \alpha \leq 3$.

Partie III.

On note $I = [2; +\infty[$.

1. Démontrer que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$.
2. Démontrer que pour tout $x \in I$: $0 < g'(x) \leq 0,5$.
3. En déduire que pour tout $t \in I$: $|g(t) - \alpha| \leq 0,5|t - \alpha|$.
4. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite d'éléments de I définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq 0,5^n |u_0 - \alpha|$.
6. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

C. Algorithmique

On rappelle qu'en langage Python les fonctions racine carrée et logarithme népérien sont respectivement notées sqrt et log.

1. Ecrire en langage Python une fonction *Image_g* d'argument x renvoyant l'image de x par la fonction g introduite dans la partie I du B.
2. Ecrire une fonction *Suite_u* d'argument n permettant de calculer une valeur approchée du terme u_n de la suite introduite dans la partie III du B.
3. Ecrire une fonction *Liste_suite_u* renvoyant la liste $u_0, \ldots, u_n$ des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
4. On rappelle que $2 \leq \alpha \leq 3$. Ecrire une fonction *Valeur_approchée_alpha* d'argument *epsilon* permettant de déterminer une valeur approchée de α à la précision *epsilon*.