Chapitre # (PS) 2 — Variables aléatoires

Résumé & Plan

Un premier objet important des probabilités est l'espace probabilisé, que nous avons étudié dans un précédent chapitre. À présent nous allons nous intéresser à des fonctions d'issues d'une expérience, que nous appellerons « variables aléatoires ».

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Cadre

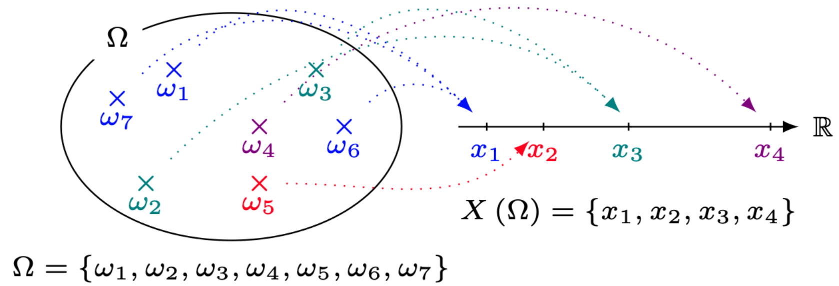
Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini, c'est-à-dire que l'ensemble Ω des issues d'une expérience aléatoire est un ensemble fini. *(Il faudra attendre l'an prochain pour s'intéresser à des expériences aléatoires possédant une infinité d'issues!)*

1. VARIABLES ALÉATOIRES

1.1. Définition

Définition 1 | Variable aléatoire réelle
On appelle **variable aléatoire réelle** sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
On appelle **support** de X, et on note $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X :
$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}.$$

Remarque 1 L'ensemble Ω étant supposé fini, il en va de même pour $X(\Omega)$. Autrement dit X a un nombre fini de valeurs possibles, d'où le nom de « variable aléatoire finie ». On notera par exemple $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (où $n \in \mathbb{N}^\star$) et on verra que dans la plupart des exemples, $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.



Exemple 1 **(Somme des lancers de deux dès)** On tire deux dés (discernables) et on note les deux résultats obtenus ω_1 et ω_2. Une issue de cette expérience est un couple (ω_1, ω_2) avec $(\omega_1, \omega_2) \in [\![1, 6]\!]^2$, par conséquent $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Si on souhaite s'intéresser à la somme des deux résultats, on considèrera la variable aléatoire
$$X : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \longmapsto & \omega_1 + \omega_2 \end{array} \right. .$$

L'ensemble des valeurs possibles pour X est :

Exemple 2 (Une même expérience, plusieurs variables aléatoires) Une expérience aléatoire consiste à lancer $n \in \mathbb{N}^\star$ fois une pièce equilibrée. On note 1 pour face et 0 pour pile. Ainsi Ω est l'ensemble des n-listes d'éléments de $\{0;1\}$.

1. On pose X_1 la fonction qui à un élément de Ω associe 1 si le premier lancer donne face, 0 sinon. Alors, $X_1(\Omega) =$
2. On pose X_2 la fonction qui à un élément de Ω associe le nombre de faces obtenus. Alors, $X_2(\Omega) =$
3. On pose X_3 la fonction qui à un élément de Ω associe le rang d'apparition du premier pile, s'il existe, et 0 sinon. Alors, $X_3(\Omega) =$

Définition 2 | Variable aléatoire constante & variable indicatrice

- Soit $a \in \mathbb{R}$. L'application
$$X : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & a \end{array} \right.$$
est une variable aléatoire réelle, dite **constante**. Elle vérifie $X(\Omega) = \{a\}$.
- Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement. L'application
$$\mathbb{1}_A : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array} \right.$$
est une variable aléatoire appelée **indicatrice** de A. Elle vérifie $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0;1\}$.

Exemple 3 On tire un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1;6]\!]$. Soit A : « le résultat est impair ». Décrivons l'indicatrice de l'ensemble A.

Remarque 2 Comme une variable aléatoire réelle sur un univers Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, si X, Y sont deux variables aléatoires réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$, $X+Y$, λX et XY sont aussi des variables aléatoires réelles (attention : leurs supports sont en général différents!)

1.2. Évènements liés à une variable aléatoire

Notation Principaux évènements associés à une variable aléatoire

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les ensembles suivants sont des événements :

- $\{X \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant x\}$
- $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < x\}$
- $\{X \geqslant x\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \geqslant x\}$
- $\{X > x\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) > x\}$
- $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\}$
- $\{x < X < y\} = \{\omega \in \Omega \,|\, y < X(\omega) < x\}$.
- Plus généralement, pour tout $I \subset \mathbb{R}$: $\{X \in I\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in I\}$.

Exemple 4 On lance deux dés et on note X la somme des deux scores obtenus. On a vu que $\Omega = [\![1;6]\!]^2$ et $X(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$. On a par exemple :

Remarque 3 Si X est une variable aléatoire réelle, on a $\{X \leq x\} = \{X < x\} \cup \{X = x\}$. En particulier si X est à valeurs entières ($X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$) alors pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$\{X \leq k\} =$$

Exemple 5 Soit X une variable aléatoire réelle finie et $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\mathbb{P}(X \leq x)$ en fonction de $\mathbb{P}(X \geq x)$.

1.3. Loi de probabilité

Définition 3
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On appelle **loi** de la variable aléatoire X, la donnée des $\mathbb{P}(X = x_k)$ pour tout réel $x_k \in X(\Omega)$.

Méthode Répondre à la question « déterminer la loi d'une variable aléatoire réelle discrète X »

1. Commencer par déterminer son support $X(\Omega)$ s'il n'est pas déjà donné.
2. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = x_k)$ pour tout $x_k \in X(\Omega)$.
   Lorsque $X(\Omega)$ est fini, on résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec, sur la 1$^{\text{ère}}$ ligne, les valeurs prises par X, et sur la 2$^{\text{ème}}$ ligne les probabilités correspondantes.

$X = x_k$	x_1	x_2	$\cdots$
$\mathbb{P}(X = x_k)$	$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\mathbb{P}(X = x_2)$	$\cdots$

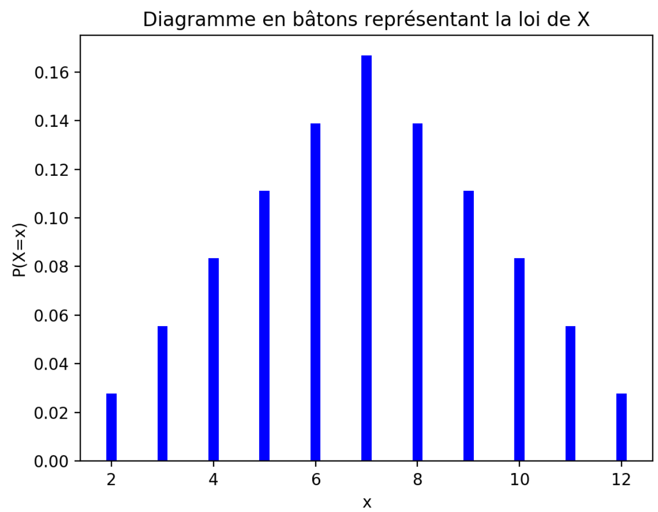
Remarque 4 Si X suit une « loi usuelle » (*c.f.* plus loin dans le cours), déterminer sa loi revient à donner ses paramètres.

Exemple 6 (Niveau Première) On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On gagne 7€ lorsque le 6 apparaît, 4€ pour le 5 et on perd 3€ dans les autres cas. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le « gain » (positif ou négatif) obtenu. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exemple 7 On lance deux dés indiscernables et on note X la somme des deux dés. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

x_i											
$\mathbb{P}(X = x_i)$											

On peut aussi représenter les résultats à l'aide d'un diagramme en bâtons :



Proposition 1 | Calculs de probabilités connaissant la loi

Si X est une variable aléatoire et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement, alors :

$$\mathbb{P}(X \in A) =$$

(Pour calculer la probabilité $\mathbb{P}(X \in A)$, on somme la probabilité de chacune des valeurs de X appartenant à A.)

Exemple 8 Dans l'exemple du lancer de deux dès, calculer $\mathbb{P}(3 \leqslant X \leqslant 5)$.

Proposition 2 | Système complet d'évènements associé à une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire finie sur Ω et $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Alors la famille d'évènements :

$$\Big(\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \ldots, \{X = x_n\}\Big)$$

forme un **système complet d'évènements** de Ω.

Preuve Soit $x_k \in X(\Omega)$, on rappelle que $\{X = x_k\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_k\}$, on a alors $\{X = x\} \in \mathbb{P}(\Omega)$ donc $\{X = x_k\}$ est un événement de $(\Omega, \mathbb{P}(\Omega))$. Si x_k et x_j sont deux éléments distincts de $X(\Omega)$, $\{X = x_k\}$ et $\{X = x_j\}$ sont incompatibles car il n'existe pas de $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = x_k$ et $X(\omega) = x_j$. De plus,

$$\bigcup_{x_k \in X(\Omega)} \{X = x_k\} = \bigcup_{x_k \in X(\Omega)} \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_k\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in X(\Omega)\} = \{\omega \in \Omega\} = \Omega.$$

Ainsi, $(\{X = x_k\}; x_k \in X(\Omega))$ forme bien un système complet d'événements.

Remarque 5 A fortiori, comme les évènements constituant le système complet d'évènements sont incompatibles, on a :

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x_k \in X(\Omega)} \{X = x_k\}\right) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X = x_k),$$

donc : $\boxed{\sum_{x_k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x_k) = 1}$.

Exemple 9 Dans l'Exemple 6,

La conclusion de la Remarque 5 (ce qui est encadré) possède une « réciproque », au sens où toute famille de réels de somme égale à 1 peut être associée à une loi de probabilité. Plus précisément :

Proposition 3 | Une distribution de probabilités donne une variable aléatoire

Si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de réels distincts et $(p_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ alors il existe une variable aléatoire X sur un univers fini vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i.$$

Preuve Admis.

Exemple 10 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la n-liste $(u_1, \ldots, u_n)$ définie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ par $u_i = \alpha \times i$. Cette n-liste définit-elle une loi de la variable aléatoire réelle X définie par $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, et : $\forall i \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = i) = u_i$?

1.4. Fonction de répartition

Définition 4 | Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition de X l'application F_X définie par

$$F_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array} \right. .$$

Exemple 11 On lance deux dés équilibrés et on note X la somme des deux scores obtenus (exemple précédent). Représenter la fonction de répartition de X.

$x \in \cdots$	$]-\infty;2[$	$[2;3[$	$[3;4[$	$[4;5[$	$[5;6[$	$[6;7[$	$[7;8[$	$[8;9[$	$[9;10[$	$[10;11[$	$[11;12[$	$[12;+\infty[$
$\mathbb{P}(X \leq x)$												

Proposition 4 | Propriétés de F_X

Soit X une variable aléatoire réelle finie et F_X sa fonction de répartition.

- F_X est une fonction croissante,
- Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } x \in [x_k; x_{k+1}[, \\ 1 & \text{si } x \geq x_n. \end{cases}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Proposition 5 | Lien entre probabilité et fonction de répartition

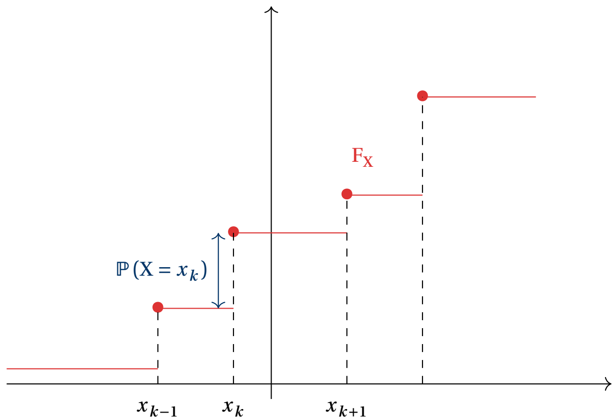
Soit X une v.a. réelle finie et F_X sa fonction de répartition. Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, on a :

$$\mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1), \quad \text{et :} \quad \forall k \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}).$$

En outre, pour tous réels a et b tels que $a < b$,

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Remarque 6 La connaissance de la fonction de répartition permet ainsi de trouver la loi de la variable aléatoire !



Allure d'une fonction de répartition dans le cas discret

L'exercice suivant est en exemple type où la fonction de répartition d'une variable aléatoire permet de trouver sa loi.

Exemple 12 Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On procède à n tirages successifs d'une boule avec remise, soit X le maximum des numéros tirés.

1. Donner $X(\Omega)$.
2. Pour tout $x_k \in X(\Omega)$, calculer $P(X \leq x_k)$.
3. Donner la loi de X.

Remarque 7 Retenir de cet exercice que lorsqu'il y a des « min » ou des « max », il faut penser à passer par la fonction de répartition pour obtenir la loi de la variable aléatoire.

1.5. Transformée d'une variable aléatoire finie

Définition 5 | Notation $g(X)$
Soit X une variable aléatoire finie. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors, l'application Y définie sur Ω par $Y(\omega) = g(X(\omega))$ est une variable aléatoire finie que l'on note $g(X)$.

Exemple 13

1. Soit X une variable aléatoire telle que : $X(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$. Soit g la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$, et soit $Y = g(X) = X^2$.

2. On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x+3$, et $\mathrm{Y} = g(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}+3$.

Proposition 6 | Loi de $g(\mathrm{X})$

Soit X une variable aléatoire et soit g une application de $\mathrm{X}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathrm{Y} = g(\mathrm{X})$, ainsi que $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$. Alors, pour tout y dans $\mathrm{Y}(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=y) = \mathbb{P}(g(\mathrm{X})=y) = \sum_{\substack{x_i\in \mathrm{X}(\Omega)\\ g(x_i)=y}} \mathbb{P}(\mathrm{X}=x_i).$$

Méthode — Pour étudier les variables aléatoires de type $\mathrm{Y} = g(\mathrm{X})$

- On détermine l'univers image $\mathrm{Y}(\Omega)$: si $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_1,\dots,x_n\}$, $\mathrm{Y}(\Omega)$ s'obtient en calculant $g(x_1),\dots,g(x_n)$.
- On détermine la loi de Y : pour tout $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$, on écrit : $\mathbb{P}(\mathrm{Y}=y) = \mathbb{P}(g(\mathrm{X})=y)$ et on essaie ensuite de se ramener à X.

Exemple 14 Soit X le résultat d'un dé cubique équilibré et $\mathrm{Y} = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-4)$. Déterminer la loi de Y.

Exemple 15 Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée dans le tableau suivant :

x_i	-2	1	2	3
$\mathbb{P}(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

Déterminer les lois des variables aléatories suivantes : $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{X}^2$ et $\mathrm{Y}_2 = 2\mathrm{X}+1$.

2. INDÉPENDANCE

2.1. Indépendance de deux variables

Définition 6 | Variables aléatoires indépendantes
Soient X, Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
On dit que X et Y sont **indépendantes**, si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, les évènements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

Exemple 16 On lance deux dés équilibrés. On note X_1 le numéro du premier dé, X_2 celui du deuxième dé et S la somme des deux résultats. X_1 et X_2 sont indépendantes mais X_1 et S ne sont pas indépendantes.

Remarque 8 On a la définition équivalente de variables aléatoires indépendantes : deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout intervalle I_1 et pour tout intervalle I_2,

$$\mathbb{P}(\{X \in I_1\} \cap \{Y \in I_2\}) = \mathbb{P}(X \in I_1) \times \mathbb{P}(Y \in I_2).$$

Proposition 7 | Transfert de l'indépendance
Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et deux applications f et g définies respectivement sur $X(\Omega)$ et sur $Y(\Omega)$. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Exemple 17 Si X et Y sont indépendantes, alors par exemple :

2.2. Famille de n variables aléatoires : indépendance mutuelle, indépendance deux à deux

Définition 7 | Variables aléatoires indépendantes deux à deux
Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur un espace probabilisé fini.
On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des **variables aléatoires deux à deux indépendantes indépendantes**, si pour tous entiers i, j distincts de $[\![1, n]\!]$, les variables X_i et X_j sont indépendantes.

A l'instar de la définition d'évènements indépendants dans un espace probabilisé, il existe une définition analogue pour l'indépendance mutuelle de plusieurs variables aléatoires.

Définition 8 | Variables aléatoires mutuellement indépendantes
Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur un espace probabilisé fini.
On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des **variables aléatoires (mutuellement) indépendantes**, si pour tout $x_1 \in X_1(\Omega)$, $x_2 \in X_2(\Omega)$, …, $x_n \in X_n(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k).$$

Cela revient à dire que pour tous $x_1 \in X_1(\Omega)$, $x_2 \in X_2(\Omega)$, …, $x_n \in X_n(\Omega)$, les évènements $\{X_k = x_k\}$ sont mutuellement indépendants.

La plupart du temps, nous ne vérifierons pas l'indépendance à l'aide de la définition, mais elle sera donnée implicitement à l'aide du texte. L'indépendance sera utilisée dans un second temps afin d'effectuer des calculs.

Remarque 9 On a la définition équivalente d'indépendance mutuelle :

$$X_1, \dots, X_n \text{ sont } \textit{indépendantes} \iff \forall I_1, \dots, I_n \text{ intervalles } \subset \mathbb{R},$$
$$\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \dots, X_n \in I_n) = \mathbb{P}(X_1 \in I_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \in I_n).$$

Exemple 18
- Dans le cas d'un tirage avec remise dans une urne, si X_i est le numéro de la i-ème boule tirée, $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
- De manière générale, si on effectue n fois la même expérience, de manière indépendante, et si X_i est le résultat de la i-ème, $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Remarque 10 Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes deux à deux. Attention, la réciproque est fausse !

Exemple 19 On lance deux pièces équilibrées. On note X la variable aléatoire qui vaut 0 si la première pièce tombe sur Pile et 1 si elle tombe sur Face. De même, on note X la variable aléatoire qui vaut 0 si la deuxième pièce tombe sur Pile et 1 si elle tombe sur Face. X et Y sont deux variables indépendantes. On pose aussi $Z = |X - Y|$. Étudier l'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle des variables X, Y et Z.

Nous admettons également les résultats qui suivent. Plutôt intuitifs, il n'est pas nécessaire de les apprendre par coeur.

Proposition 8 | Propriétés de l'indépendance mutuelle

1. **[Famille extraite]**
   Soient $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes et $m \leq n$. Alors les variables $X_1, \dots, X_m$ sont mutuellement indépendantes.
2. **[Lemme des coalitions]**
   Soient $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+p}$ mutuellement indépendantes et $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors les variables $u(X_1, \dots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \dots, X_{n+p})$ sont indépendantes.
3. **[Transfert de l'indépendance]**
   Soient $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes et $u_1,\ u_2, \dots, u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions. Alors les variables $u_1(X_1), \dots u_n(X_n)$ sont indépendantes.

Exemple 20

- Si X_1, X_2, X_3 sont indépendantes et X_3 ne s'annule pas, alors $X_1^2, X_2^2, 1/X_3$ sont indépendantes.
- Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont indépendantes alors $X_1^2 + X_2^2, X_3X_5, X_4$ sont indépendantes.

3. ESPÉRANCE, VARIANCE ET MOMENTS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

3.1. Espérance

Définition 9 | Espérance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire finie avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, on appelle **espérance de** X, notée $\mathbb{E}(X)$, la quantité définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

(On peut aussi écrire : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$. *)*

Remarque 11

- En clair l'espérance de X est la moyenne des valeurs prises par X, pondérée par les probabilités qu'a X de prendre chacune de ces valeurs. L'espérance mathématique correspond donc à la **moyenne** d'une série statistique. Elle représente la valeur moyenne que X prend.
- Si X est la variable aléatoire égale au gain d'un jeu alors $\mathbb{E}(X)$ est la valeur moyenne du gain que l'on peut espérer. Ainsi, si $\mathbb{E}(X)$ est strictement positif alors le jeu est favorable au joueur, si $\mathbb{E}(X)$ est strictement négatif alors le jeu est défavorable, et si $\mathbb{E}(X) = 0$ alors le jeu est équitable.

Exemple 21 Considérons une variable aléatoire dont la loi est donnée ci-dessous.

x_i	7	2	-3	-8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{30}$

Calculer son espérance.

✎

Exemple 22

⋆ Si $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$, alors :

⋆ Si $X(\Omega) = \{-3, -1, 1, 2\}$, alors :

Proposition 9 | Espérance d'une constante, d'une indicatrice

- Si X est constante égale à a, alors : $\mathbb{E}(X) = a$.
- Soit A un évènement. On a : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ *(ce deuxième point de la proposition permet d'interpréter les probabilités comme des moyennes.)*

Preuve

-
-

Propriétés de l'espérance.

Proposition 10 | Propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires finies.

- **[Linéarité]** Pour tous réels a et b : $\boxed{\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)}$.
  (Ce résultat s'étend aux sommes finies de variables aléatoires)
- **[Linéarité : cas particulier.]** On a : $\boxed{\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b}$.
- **[Positivité]**
  i) Si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
  ii) Si $X \geq 0$ et $\mathbb{E}(X) = 0$ alors $X = 0$.
- **[Croissance]** Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

Preuve

- **[Linéarité]** Concernant la linéarité, nous ne sommes en mesure de démontrer seulement le cas particulier. Démontrons ainsi que $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.
- **[Positivité.]**
  i)

  ii)

- **[Croissance]**

Attention

Il est faux de dire que $\mathbb{E}(X) = 0 \Longrightarrow X = 0$! *(Sauf si X est à valeurs positives)*
Par exemple, la variable aléatoire qui prend les valeurs 1 et -1 avec même probabilité $1/2$ a une espérance nulle, alors qu'elle n'est pas nulle !

Exemple 23 **(Utilisation de la linéarité de l'espérance)** Une urne contient trois boules bleues, une rouge et six jaunes. On y pioche deux boules. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues obtenues.
Pour 10 euros un joueur pioche deux boules. Il gagne 12 euros par boule bleue obtenue. Soit Y la variable aléatoire égale à son gain total. Donner une formule exprimant Y en fonction de X, et en déduire le gain moyen du joueur.

THÉORÈME DE TRANSFERT. Le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de variables aléatoires du type $g(X)$, sans nécessairement passer par la détermination de la loi de $g(X)$.

Théorème 1 | Théorème de transfert
Soit X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega) = \{x_k\}_{1\leqslant i\leqslant n}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors, la variable aléatoire $g(X)$ a pour espérance :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\,\mathbb{P}(X = x_k)$$

(On peut aussi noter : $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$*)*

Remarque 12
- En clair l'espérance de $g(X)$ est la moyenne des $g(x_k)$, pondérée par les probabilités que X a de prendre les valeurs x_k.
- L'intérêt de cette formule est qu'elle permet le calcul de l'espérance de $g(X)$ sans qu'il y ait besoin de déterminer sa loi. Il suffit de connaître celle de X.
- **Cas particulier utile** : $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k\in X(\Omega)} k^2\mathbb{P}(X = k)$

Exemple 24 **(Calcul de $\mathbb{E}(X^2)$ de deux façons.)**

Soit X une variable aléatoire de loi :

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

On souhaite connaître $\mathbb{E}(X^2)$.
- **[Méthode 1]** Cherchons la loi de $Y = X^2$.

- **[Méthode 2]** On utilise, sans calcul préalable, la formule de transfert.

Cas où les variables aléatoires sont indépendantes.

Proposition 11 | Espérance de XY en cas d'indépendance

Soient X, Y deux variables aléatoires finies réelles **indépendantes** sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On a

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

(Ce résultat s'étend à un produit fini de variables aléatories mutuellement indépendantes)

Preuve Admis : cela nécessite une formule de transfert pour les couples de variables aléatoires, qui ne sera vue qu'en fin de deuxième année de BCPST.

Remarque 13 On peut avoir $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ sans que X et Y soient indépendantes. Exhibons un contre-exemple : on place au hasard deux billes dans deux boîtes A et B. On note X la variable aléatoire égale au nombre de billes dans la boite A et Y la variable aléatoire égale au nombre de boites vides. Alors :

3.2. Moments d'ordre r

Définition 10 | Moment

Soit X une variable aléatoire finie. Le moment d'ordre r avec $r \in \mathbb{N}^*$ de X est le réel $m_r(X) = \mathbb{E}(X^r)$.

Remarque 14

- Une variable aléatoire finie admet des moments de tous ordres et par le théorème de transfert :
$$m_r(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^r \, \mathbb{P}(X = x_k) \qquad \text{avec } X(\Omega) = \{x_1; \ldots; x_n\}.$$
- L'espérance de X est le moment d'ordre 1 de X.

Exemple 25 On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X le numéro obtenu. Déterminer le moment d'ordre 3 de X.

Preuve

3.3. Variance

Définition 11 | Variance et écart type

Soit X une variable aléatoire avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. On définit la variance et l'écart-type de X par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

En notant $m = \mathbb{E}(X)$, on a donc d'après le théorème de transfert que :

$\mathbb{V}(X) =$

- $\sigma(X)$ est bien défini puisque $\mathbb{V}(X) \geq 0$. L'écart-type et la variance de X sont des réels positifs qui quantifient la **dispersion** de X autour de sa moyenne. Un écart-type élevé signifie que X a tendance a prendre des valeurs relativement lointaines de sa moyenne.
- L'écart-type, contrairement à la variance, a la même unité que X (si X a une unité).

Exemple 26 Considérons une variable aléatoire X dont la loi est donnée ci-dessous. Calculer sa variance.

x_i	7	2	−3	−8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{30}$

Théorème 2 | Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire finie alors sa variance vérifie :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Remarque 15 $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ est le moment d'ordre 2 de X. Pour calculer la variance de X, on peut donc calculer son espérance et son moment d'ordre 2 puis appliquer la formule de König-Huygens. C'est d'ailleurs comme cela que l'on raisonne en pratique dans la majorité des cas.
Cela arrive parfois aussi d'utiliser la formule de König-Huygens pour calculer $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ connaissant $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{E}(X)$ (car $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2$).

Exemple 27 On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X le numéro obtenu. Déterminer la variance de X.

Proposition 12 | Propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire finie. Pour tous réels a et b :

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X).$$

Preuve

Remarque 16 En particulier, si $a = 1$ dans la proposition précédente,

$$\mathbb{V}(X+b) = \mathbb{V}(X).$$

En effet, en translatant les valeurs prises par X (en leur ajoutant b), on ne modifie pas la dispersion des valeurs autour de la moyenne (qui elle change en revanche puisque $\mathbb{E}(X+b) = \mathbb{E}(X)+b$).

Exemple 28 Considérons une variable aléatoire X dont la loi est donnée ci-dessous. On note $Y = 2X+3$. Calculer la variance de X.

x_i	7	2	-3	-8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{30}$

Définition 12 | Variable aléatoire centré, variable aléatoire réduite.

Soit X une variable aléatoire finie.

- On dit que X est **centrée** lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.
- On dit que X est **réduite** lorsque $V(X) = 1$.

Proposition 13 | Obtenir une variable centrée

Soit X une variable aléatoire finie, alors, $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire centrée.

Preuve

Proposition 14 | Obtenir une variable centrée réduite

Soit X une variable aléatoire finie de variance non nulle, alors la variable aléatoire

$$X_\star = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est une variable aléatoire centrée.

Preuve

Remarque 17 Il est souvent commode de travailler avec des variables aléatories centrées réduites. On vient donc de justifier qu'on peut toujours se ramener à ce cas quitte à opérer une certaine fonction affine sur notre variable.

Le cas des variables aléatoires indépendantes. Dans toute la suite de cette sous-section, les variables aléatoires mises en jeu seront **indépendantes**.

Proposition 15

Soient X et Y deux variables aléatoires finies **indépendantes**. Alors :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

(Le résultat s'étend par récurrence aux sommes finies de variables aléatoires mutuellement indépendantes)

Preuve

Exemple 29 On lance deux dés, on note X_1 le résultat du premier dé, X_2 le résultat du second dé et $X = X_1 + X_2$. Déterminer la variance de $X_1 + X_2$.

4. LOIS USUELLES

Nous avons vu la théorie à connaître sur les variables aléatoires en général. Cependant, de nombreuses variables aléatoires rencontrées dans les modèles mathématiques (et donc dans les exercices) suivent un petit nombre de lois, nommées en conséquence lois usuelles. Dans cette partie, nous allons étudier les lois usuelles finies qui sont au programme. Pour chaque loi usuelle, il faudra connaître par cœur :

1. la notation (et ses paramètres éventuels)
2. la loi de probabilité (et en particulier $X(\Omega)$)
3. l'espérance et la variance
4. le ou les cas typiques d'utilisation

Notation

On utilisera le symbole $\hookrightarrow$ pour signifier qu'une variable aléatoire « suit » une loi usuelle.

4.1. Loi uniforme

Définition 13 | Loi uniforme

Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini à n éléments. On dit que X suit la **loi uniforme** sur E si $\mathbb{P}(X = x_k)$ ne dépend pas de k, ce qui implique que :

$$\forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \qquad \mathbb{P}(X = x_k) = \frac{1}{n}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$ pour dire « X suit la loi uniforme sur E ».

Situation type : La loi uniforme est adaptée pour modéliser

$$\boxed{\text{toute expérience dont les issues sont équiprobables}}.$$

C'est le cas dès que les issues mettent en jeu des objets indiscernables puisque dans ce cas on n'a aucune raison d'attribuer une plus grande probabilité à tel ou tel de ces objets. C'est donc une situation très fréquente : jet de dé, lancer de pièce, roulette, tirage de boules dans une urne...

Exemple 30 **(Deux exemples classiques)**

1. On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.

2. On tire au hasard (de façon équiprobable) une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on note X le numéro obtenu.

Remarque 18 Le plus souvent on est amené à considérer la loi uniforme sur un ensemble du type $E = [\![1;n]\!]$ ou plu généralement $E = [\![m;n]\!]$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$. On donne l'espérance et la variance dans un cas particulier.

Proposition 16 | Espérance et variance d'une loi uniforme

Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1\,,\,n]\!])$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Preuve

Remarque 19 Dans la proposition précédente, seule la formule de l'espérance figure au programme officiel (il faut savoir retrouver celle de la variance au concours si on vous la demande).

Méthode **Modélisation et rédaction pour utiliser la loi uniforme**

- **[Modélisation]** Soit une expérience aléatoire comportant n issues équiprobables numérotées de 1 à n. Alors la variable aléatoire finie égale au numéro de l'issue se réalisant suit une loi $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$.
- **[Rédaction]** on écrira « comme les valeurs de X sont les entiers entre 1 et n, et que toutes ces valeurs sont équiprobables, alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;n]\!])$ ».

4.2. Loi de Bernoulli

Définition 14 | Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p \in [0;1]$ lorsque $X(\Omega) = \{0;1\}$ et :

$$\mathbb{P}(X=0) = 1-p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=1) = p.$$

On note : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues : une que l'on qualifie de « succès » de probabilité p et l'autre que l'on qualifie « d'échec » de probabilité $1-p$. On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un « succès », la variable aléatoire prend la valeur $X = 1$, et sinon $X = 0$.

Exemple 31 On lance une pièce équilibré et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est « Pile » et 0 sinon. Quelle est la loi suivie par X ?

Exemple 32 Calculer et représenter la fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1/4)$.

Proposition 17 | Espérance et variance d'une loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Alors, X admet une espérance et une variance et on a :

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p(1-p).$$

Remarque 20 En particulier, si X suit une certaine loi de BERNOULLI, son paramètre est donné par $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{E}(X)$.

Preuve

Méthode Modélisation et rédaction pour utiliser la loi de Bernoulli

- **[Modélisation]** On utilise la loi de Bernoulli dès qu'on considère une épreuve ayant 2 issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1-p$. En effet, dans ce cas, la variable aléatoire valant 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
- **[Rédaction]** on écrira « on appelle succès l'événement ...de probabilité p. Alors X, la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès, 0 en cas d'échec, suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = ...$ »

4.3. Loi binomiale

SCHÉMA BINOMIAL. Supposons qu'on réalise n fois une tentative d'un certain défi (comme réussir un panier au basket, obtenir 6 avec un dé, ...). On note

$$\boxed{\text{X le nombre de succès obtenus}}.$$

On a $X(\Omega) = \{0,1,\dots,n\}$. Chaque tentative a une probabilité p de réussir avec $p \in]0,1[$ fixé, et les résultats des tentatives sont supposés mutuellement indépendants. Dans ce cadre là, **quelle est la loi de X ?**

Il est commode de noter 1 un succès et 0 un échec, l'univers est alors $\Omega = \{0,1\}^n$ et X est la variable aléatoire définie par

$$X \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega_1,\dots,\omega_n) & \longmapsto & \omega_1+\cdots+\omega_n \end{array} \right.$$

Par exemple, pour $\omega = (1,0,0,0,1,1,0,1,0)$ on a $X(\omega) = 4$ donc 4 succès.

L'évènement $\{X = k\}$ contient les issues qui contiennent :

- chacune de ces issues a une probabilité :

- il y a telles issues puisqu'il s'agit de choisir les positions des k succès parmi les n tentatives.

On a donc :

Définition 15 | Loi binomiale

On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$) si $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ et

$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ pour dire « X suit la loi binomiale de paramètres n et p ».

Situation type : D'après le schéma binomial, cette loi est adaptée pour modéliser toute situation où l'on compte le nombre d'occurrences d'un évènement que l'on tente de réaliser un certain nombre de fois de manière indépendante.

Remarque 21

- Par la formule du binôme de Newton, on a $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = (p + (1-p))^n = 1$ donc la loi binomiale est bien une loi de probabilité.
- La loi de Bernoulli est le cas particulier de la loi binomiale avec $n = 1$.

Exemple 33 On lance 10 fois de suite un dé non truqué, et on note X le nombre de numéros obtenus inférieurs ou égaux à 2. Quelle est la loi suivie par X ?

Proposition 18 | Somme de bernoullis indépendantes

Soient $p \in [0,1]$, $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 1$ des variables aléatoires réelles **indépendantes** telles que pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Alors :

$$X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).$$

Preuve Montrons cela par récurrence sur n. On note :

$$\mathscr{P}_n \quad « \forall i \in [\![1\,,\,n]\!], \quad X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \implies S_n = X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) ».$$

Initialisation. $\mathscr{P}(1)$ est vraie puisque $\mathcal{B}(1,p) = \mathcal{B}(p)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$.
On a par hypothèse $Y = X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, donc $Y(\Omega) = [\![0\,,\,n]\!]$ et $X_{n+1}(\Omega) = [\![0\,,\,1]\!]$.
Ainsi, $S_{n+1}(\Omega) = (Y + X_{n+1})(\Omega) = [\![0\,,\,n+1]\!]$.
Soit $k \in [\![0\,,\,n+1]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_{n+1} = k)\\
&= \mathbb{P}(Y + X_{n+1} = k)\\
&= \mathbb{P}_{X_{n+1}=0}(Y + X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \qquad \{X_{n+1} = 0, X_{n+1} = 1\} \textit{ est un système complet d'évènements}\\
&\qquad + \mathbb{P}_{X_{n+1}=1}(Y + X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\\
&= \mathbb{P}_{X_{n+1}=0}(Y = k)\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}_{X_{n+1}=1}(Y = k-1)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \qquad \textit{indépendance } Y \perp\!\!\!\perp X_{n+1}\\
&= \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(Y = k-1)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\\
&= (1-p)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + p\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n+1-k}\\
&= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n+1-k} + \binom{n}{k-1}p^k(1-p)^{n+1-k}\\
&= \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]p^k(1-p)^{n+1-k} = \binom{n+1}{k}(1-p)^{n+1-k} \quad \text{en utilisant la formule de Pascal}
\end{aligned}$$

On a donc établi que $Y + X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n+1,p)$, donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et la proposition est vraie par principe de récurrence.

Proposition 19 | Espérance et variance d'une loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. Alors l'espérance et la variance de X sont données par :

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Preuve

Remarque 22 Démontrons la formule pour l'espérance d'une autre manière.

Méthode Modélisation et rédaction pour utiliser la loi binomiale

- **[Modélisation]** Soit une expérience aléatoire se déroulant en n épreuves indépendantes. Chaque épreuve a deux issues possibles : succès avec probabilité p ou échec avec probabilité $1-p$. La variable aléatoire X comptant le nombre de succès au cours de n épreuves de Bernoulli suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.
- **[Rédaction]** on écrira « Dans une expérience à deux issues, on appelle succès l'événement ... de probabilité p. On répète n fois cette expérience de manière identique et indépendante. Alors si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

4.4. Tableau récapitulatif des lois discrètes

Loi	Valeurs prises	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$	$\llbracket 1;n \rrbracket$	$P(X=k)=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$	$\{0;1\}$	$P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$\llbracket 0;n \rrbracket$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

5. SIMULATIONS INFORMATIQUES

Simuler une variable aléatoire X, c'est écrire une fonction Python qui renvoie aléatoirement une valeur de $X(\Omega)$ avec la même probabilité que X.

Pour réaliser cela, on a besoin d'une bibliothèque `random` qui contient de nombreuses fonctions pré-programmées permettant de simuler des variables aléatoires. Nous utiliserons essentiellement les fonctions :

1. `random()` *(sans paramètre)* qui renvoie un flottant pris aléatoirement dans l'intervalle $[0,1[$: pour importer cette fonction, écrire `from random import random`
2. `randint(a,b)` *(où a et b sont deux paramètres entiers vérifiant $a \leqslant b$)* qui renvoie un entier pris aléatoirement dans l'intervalle $\llbracket a;b \rrbracket$: pour importer cette fonction, écrire `from random import randint`.

Exemple 34 Ecrire une fonction `de()` *(sans paramètre)* qui simule un lancer de dé équilibré.

Exemple 35 On lance deux dés équilibrés et on note X la somme des deux scores obtenus. Écrire une fonction `simulX()` en langage Python qui simule la variable aléatoire X.

5.1. Simulation de la loi de Bernoulli

Soit $p \in]0,1[$. Pour simuler une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(p)$, il faut écrire une fonction `Bernoulli(p)` qui renvoie 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour cela on tire un nombre au hasard entre 0 et 1 grâce à la fonction `random()`. On remarque alors que :

1. Ce nombre est inférieur à p si et seulement si il appartient à l'intervalle $[0,p[$. Cela se produit avec une probabilité p.
2. Ce nombre est supérieur à p si et seulement si il appartient à l'intervalle $[p,1[$. Cela se produit avec une probabilité $1-p$.

Il suffit donc de renvoyer 1 si le nombre est inférieur à p et 0 sinon.

```
from random import random
def Bernoulli(p):
    if random() < p :
        return 1
    else :
        return 0
```

5.2. Simulation de la loi Binomiale

Pour simuler une variable suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, il suffit de faire la somme de n simulations d'une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$:

```
def binomiale(n, p):
    S = 0
    for i in range(n):
        S = S + Bernoulli(p)
    return S
```

5.3. Simulation de la loi uniforme [H.P]

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a<b$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$, de sorte que :

$$\forall k \in [\![a;b]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{b-a+1}.$$

Pour simuler X, on peut simplement utiliser `randint(a,b)`. On peut vouloir s'en passer! Pour cela :

1. On tire un réel X au hasard dans $[0,1[$ à l'aide de la fonction `random()`.
2. On le multiplie par $(b-a+1)$: X est alors un réel aléatoire dans l'intervalle $[0,b-a+1[$.
3. On lui ajoute a : X est alors un réel aléatoire dans l'intervalle $[a,b+1[$.
4. On a alors $\lfloor X\rfloor \in [\![a;b]\!]$ et, pour tout $k \in [\![a;b]\!]$,
$$\mathbb{P}(\lfloor X\rfloor = k) = \mathbb{P}(X \in [k,k+1[) = \frac{1}{b-a+1}.$$
Ainsi $\lfloor X\rfloor$ suit la loi $\mathscr{U}([\![a;b]\!])$.

```
from random import random
from math import floor
def uniforme(a,b):
    X = random()
    X=a+(b-a+1)*X
    return int(floor(X))
```

6. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant les paramètres d'une variable aléatoire :
   - Savoir trouver la loi d'une variable aléatoire,
   - Savoir trouver la fonction de répartition d'une variable aléatoire, ... ☐
   - Connaître la définition de l'espérance . . . . ☐
   - savoir utiliser la formule de transfert . . . . ☐
   - Connaître la définition de la variance . . . . ☐
   - savoir utiliser la formule de KÖNIG-HUYGENS . . . . ☐
2. Concernant les lois usuelles, il faut connaître
   - la définition et les paramètres de la loi uniforme . . . . ☐
   - la définition et les paramètres de la loi de BERNOULLI . . . . ☐
   - la définition et les paramètres de la loi binomiale . . . . ☐

Calculs de lois, fonctions de répartition, espérance et variance

Exercice 1 | On lance un dé à 6 faces équilibré. Il possède une face avec le numéro 1, deux faces avec le numéro 2 et trois faces avec le numéro 3. On note X le numéro obtenu. Donner la loi de X, sa fonction de répartition et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 2 | Soit X une v.a. telle que $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que : $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(X < 5) = \frac{1}{3}$, et $\mathbb{P}(X > 5) = \frac{1}{4}$.
2. Tracer le diagramme en bâtons de X.
3. Donner sa fonction de répartition et la tracer.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.
5. Donner la loi des variables $Y = X^2 + X - 2$ et $Z = \min(X, 4)$.

Exercice 3 | Un joueur lance une fléchette sur une cible circulaire de 1 mètre de rayon. Il atteint toujours la cible. La probabilité de toucher une partie de la cible est proportionnelle à son aire. La cible est divisée en couronnes concentriques par des cercles de rayons $\frac{k}{n}$, avec k allant de 0 à $n-1$. Si le joueur atteint la cible entre les cercles de rayons $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$, il gagne $n-k$ euros.
Quelle est l'espérance de son gain ?

Exercice 4 | Soient N boules numérotées de 1 à N dans une urne. On tire n boules avec remise et on note X le plus grand numéro parmi les n boules tirées.

1. Déterminer la loi de X.
2. Lorsque N est fixé, que vaut la limite de $\mathbb{E}(X)$ quand $n \to +\infty$? et $\mathbb{V}(X)$?

Avec des lois usuelles

Exercice 5 | On soumet une population de 10^6 cellules à 5 séances d'irradiation. On suppose que les réactions des différentes cellules sont indépendantes les unes des autres et qu'à chaque séance, la probabilité qu'une cellule meure est de $0,3$. Donner le nombre moyen de cellules tuées.

Exercice 6 | Pour chacune des variables aléatoires décrites ci-dessous, donner la loi, l'espérance, la variance.

1. On lance une pièce de monnaie équilibrée, et on observe si Pile est sorti.
2. Sur la liste électorale d'une ville, il y a 54% de femmes. On choisit au hasard un nom de la liste et on note s'il s'agit d'une femme.
3. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. On s'intéresse au nombre de bosses.
4. On tire au hasard une boule dans une urne contenant 5 boules rouges et 4 boules noires et on observe s'il s'agit d'une boule rouge.
5. On lance 20 fois un dé cubique équilibré. On regarde combien de fois on obtient un nombre supérieur ou égal à 5.
6. On suppose que 1% des trèfles possèdent quatre feuilles. On cueille 100 trèfles. On compte le nombre de trèfles à quatre feuilles cueillis.
7. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On tire un jeton du sac, on note la lettre obtenue et on le remet dans le sac. On forme ainsi un mot de 5 lettres. On regarde ensuite le nombre de voyelles dans ce mot.
8. On considère 128 boules numérotées de 1 à 128. On en tire 10 parmi les 128, puis on en tire une parmi les 10. On s'intéresse au numéro de la boule obtenue.

Exercice 7 | Un tireur à l'arc vise une cible, qu'il atteint à chaque tir avec une probabilité de $\frac{1}{4}$. On suppose les tirs indépendants. Combien de flèches doit lancer le tireur pour que la probabilité d'atteindre la cible soit au moins de $\frac{2}{3}$?

Exercice 8 | Le but de l'exercice est de redémontrer que la variance de $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ est $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

1. Montrer que, pour tout $k \in [\![2;n]\!]$,
$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$
2. Montrer que $\mathbb{E}(X(X-1)) = n(n-1)p^2$ en utilisant le théorème du transfert.
3. En déduire $\mathbb{V}(X)$ en remarquant que
$$X^2 = X(X-1) + X.$$

Exercice 9 | On effectue n lancers successifs d'une pièce qui donne FACE avec la probabilité p. On note X le nombre de FACE obtenus. Calculer l'espérance de la variable $Z = \dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 10 |

1. Soit X une v.a. finie.
   On définit la fonction G_X par $G_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$.
   1.1) Que vaut $G_X(0)$?
   Montrer que $G_X'(0) = \mathbb{E}(X)$,
   et $G_X''(0) = \mathbb{E}(X^2)$.
   1.2) Calculer G_X lorsque X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.
   1.3) Retrouver l'expression de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ si X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.
2. Un tireur doit toucher $n \in \mathbb{N}^*$ cibles numérotées de 1 à n dans l'ordre et il s'arrête dès qu'il rate une cible. On suppose que s'il se présente devant la $k$ième cible, la probabilité qu'il la touche est $p \in]0;1[$. On note X le nombre de cibles touchées.
   2.1) Déterminer la loi de X.
   2.2) En utilisant la fonction génératrice associée à X, calculer $\mathbb{E}(X)$ puis la limite de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$.

Suites de variables aléatoires

Exercice 11 | Une urne contient 2 boules rouges et $n-2$ boules blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. On note X_n et Y_n les rangs d'apparition de la première et de la deuxième boule rouge.

1. Déterminer la loi de X_n puis en déduire la valeur de $e_n = \mathbb{E}(X_n)$.
2. Donner un équivalent simple de e_n quand $n \to \infty$.
3. En moyenne, combien de tirages ont lieu entre les deux boules rouges ?

Exercice 12 | Chaque individu d'une population souffre d'une maladie avec probabilité $p = 0,01$. Pour dépister cette maladie dans un échantillon de n individus, on peut :

- TECHNIQUE 1 : effectuer un dépistage sur un échantillon sanguin de chaque individu.
- TECHNIQUE 2 : effectuer d'abord une analyse sur un échantillon contenant le mélange du sang des n individus, puis dans le cas où le résultat est positif analyser pour chaque échantillon.

Soit X_n le nombre d'analyses avec la 2ème méthode.

1. Déterminer la loi de X_n.
2. Quelle loi classique suit la variable $\dfrac{X_n - 1}{n}$? En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. Montrer que la technique 2 est préférable à la technique 1 si et seulement si $\ln(0,99)n + \ln n > 0$.
4. Étudier sur $]0;+\infty[$ les variations et les limites de la fonction $f(x) = \ln(0,99)x + \ln x$.
5. Déterminer (calculatrice requise) la plus grande valeur $n \in \mathbb{N}$ pour laquelle $f(n) > 0$.
6. Pour quelles valeurs de n la technique 2 est-elle plus économique en moyenne ?

Exercice 13 | Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance les dés une première fois et on note X_1 le nombre de 6 obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres (s'il en reste). On note alors X_2 le nombre de 6 obtenus et on répète l'expérience, définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots$ S'il ne reste plus de dés au m−ème lancer, alors $X_m = 0$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$.

1. A quoi correspond la valeur de S_n ?
2. On cherche à montrer par récurrence que $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(N, p_n)$ où on déterminera p_n.
   2.1) Pour $M \leq k \leq N$, montrer que $\dbinom{N}{M}\dbinom{N-M}{k-M} = \dbinom{N}{k}\dbinom{k}{M}$.
   2.2) Vérifier que $S_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(N, p_1)$ où p_1 est à préciser.
   2.3) On suppose que pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, il existe une valeur $p_n \in [0;1]$ telle que $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(N, p_n)$.
   a) Pour $M \leq k \leq N$, déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = k - M | S_n = M)$.
   b) En déduire que $S_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(N, p_{n+1})$ où $p_{n+1} = \dfrac{1+5p_n}{6}$.
   2.4) Calculer p_n.

Exercice 14 | On considère une urne contenant initialement 1 boule blanche et 1 boule noire. On tire une boule au hasard puis on la replace dans l'urne *en y ajoutant une autre boule de la même couleur*. L'urne contient maintenant 3 boules. On réitère ce procédé. Soit X_n le nombre de boules blanches dans l'urne au bout de n tirages.

1. Déterminer la loi de X_1, de X_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout n, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.
3. Soit B_n l'évènement « la n-ème boule tirée est blanche ». Montrer que $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{E}(X_{n-1})$.
4. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(\overline{B_n})$. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 15 | On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants 0, 1, 2, 3... Les fonctionnement respectifs de ces deux ampoules sont supposées indépendants. A l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé.
A chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\frac{1}{2}$ de rester allumée et $\frac{1}{2}$ de griller.
On note, pour tout entier naturel n, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $X_n(\Omega)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $\mathbb{E}(X_0) = 2$.
3. Déterminer la variance de X_0.
4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$
5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et sans justification les valeurs des probabilités conditionnelles suivantes :

   5.1) $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0)$.
   5.2) $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)$.
   5.3) $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)$.
   5.4) $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$.
   5.5) $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2)$.
   5.6) $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1)$.
   5.7) $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = 2)$.
7. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ où
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

On cherche dans la suite à déterminer l'espérance et la variance de tous les X_n sans chercher leur loi. On introduit les éléments de $\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ suivants :
$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $\mathbb{E}(X_n) = L_1 U_n$.
9. Calculer $L_1 A$ et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1.
10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_n).$$
11. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
12. Exprimer, pout tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de L_2 et U_n.
13. Calculer $L_2 A$ et montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera, tels que $L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2$.
14. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
    15.1) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
    15.2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \mathbb{E}(X_n^2) - u_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.
    15.3) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de n.
16. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $\mathbb{V}(X_n)$ en fonction de n.