DS # 8
25/05/2024 – Durée : 2h00

Consignes. *Le sujet est constitué de **trois exercices indépendants**. Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.*

*Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant, en les surlignant ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'usage de la calculatrice est strictement **interdit**.*

Exercice 1 | Développements limités usuels. Solution Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\sin(x)+\cos(x)-\dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0.

(b) En déduire un équivalent simple en 0 de $\sin(x)+\cos(x)-\dfrac{1}{1+x}$.

2. On a à notre disposition les développements limités en 0 de trois fonctions :

$$\begin{cases} f(x)=2+x+3x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right) \\ g(x)=x-3x^2+\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\ h(x)=\dfrac{1}{2}-x+\dfrac{x^2}{3}+\mathrm{o}\left(x^2\right) \end{cases}$$

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en 0 à l'ordre 2.

(a) $f(x)+g(x)=\cdots$ **(b)** $\dfrac{g(x)}{x}=\cdots$ **(c)** $f(x)h(x)=\cdots$ **(d)** $\dfrac{1}{f(x)}=\cdots$

Exercice 2 | Composées de développements limités, positions relatives. Solution

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
3. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 (on notera encore f la fonction ainsi prolongée) et que f est dérivable en 0. On prendra soin de préciser la valeur de $f(0)$ et de $f'(0)$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position de la tangente par rapport à la courbe représentative de f au voisinage de ce point.

Exercice 3 | Espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Solution

On considère l'espace vectoriel $\mathrm{E}=\mathbb{R}^4$ et les vecteurs

$$a=(1,3,0,2)\qquad b=(2,7,-3,6)\qquad c=(1,1,6,-2)$$

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\mathrm{F}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\quad -x+y+z=0\quad\text{et}\quad 4x-2y+t=0\right\}\ \text{ et }\ \mathrm{G}=\mathrm{Vect}(a,b,c).$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ de F, et sa dimension.

2. (a) Etudier si la famille (a,b,c) est libre. Si ce n'est pas le cas, chercher une relation entre les vecteurs de cette famille.

(b) Justifier que $\mathrm{G}=\mathrm{Vect}(a,b)$. Déterminer une base $\mathscr{B}_{\mathrm{G}}$ de G, et sa dimension.

3. Le but de cette question est de déterminer $\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})$ à l'aide d'arguments de dimension.

3.1) Justifier que $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}\subset\mathrm{F}$ et que $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}\subset\mathrm{G}$.

3.2) Justifier que $\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})\in\{0,1,2\}$.

3.3) Montrer que le vecteur $d=(1,4,-3,4)$ appartient à $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$. En déduire que $\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})\in\{1,2\}$.

3.4) On suppose par l'absurde que $\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})=2$.

- **(i)** Montrer alors que $\mathrm{F}=\mathrm{G}$.
- **(ii)** Le vecteur a appartient-il à F ? Appartient-t-il à G ? Qu'en déduit-on concernant l'égalité $\mathrm{F}=\mathrm{G}$?
- **(iii)** Conclure : que vaut donc $\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})$?

Dans toute la suite, on note

$$\mathrm{F}+\mathrm{G}=\left\{w\in\mathbb{R}^4,\ w=u+v \text{ avec } u\in\mathrm{F} \text{ et } v\in\mathrm{G}\right\}.$$

Ainsi, $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ constitué des vecteurs pouvant s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

4. 4.1) Montrer que : $0_{\mathbb{R}^4}\in\mathrm{F}+\mathrm{G}$.

4.2) Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Soit $(w_1,w_2)\in(\mathrm{F}+\mathrm{G})^2$. Montrer que : $\lambda w_1+\mu w_2\in\mathrm{F}+\mathrm{G}$.

4.3) Que vient-on de démontrer ?

5. 5.1) Montrer que $\mathscr{B}=\mathscr{B}_{\mathrm{F}}\cup\mathscr{B}_{\mathrm{G}}$ est une famille génératrice de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$.

5.2) Déterminer le rang de $\mathscr{B}$ (un échelonnement en ligne suffit) et en déduire $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G})$

5.3) Montrer la formule de Grassmann :

$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G})=\dim(\mathrm{F})+\dim(\mathrm{G})-\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}).$$

Correction
DS 8
25/05/2024 – Durée : 2h00

Solution (exercice 1) Énoncé Dans toute la correction de cet exercice, on se place au voisinage de 0.

1. (a) Par somme de développements limités usuels (du cours) :

$$\sin(x)+\cos(x)-\frac{1}{1+x} = x-\frac{x^3}{6}+1-\frac{x^2}{2}-\left(1-x+x^2-x^3\right)+o\left(x^3\right)$$
$$= \boxed{2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+o\left(x^3\right)}$$

(b) On en déduit que : $\boxed{\sin(x)+\cos(x)-\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} 2x}$ *(à savoir le premier terme non nul du développement limité)*

2. (a) Comme $g(x)=x-3x^2+o\left(x^2\right)$ (par troncature), on obtient par somme de développements limités que :

$$\boxed{f(x)+g(x)=2+2x+o\left(x^2\right)}$$

(b) On obtient directement que :

$$\boxed{g(x)=1-3x+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)}$$

(c) Par produit de développements limités,

$$f(x)h(x)=\left(2+x+3x^2+o\left(x^2\right)\right)\left(\frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)$$
$$=1-2x+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x-x^2+\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)$$
$$=1-\frac{3}{2}x+\underbrace{\left(\frac{2}{3}-1+\frac{3}{2}\right)}_{=\frac{4-6+9}{6}=\frac{7}{6}}x^2+o\left(x^2\right)$$

On en déduit que :

$$\boxed{f(x)h(x)=1-\frac{3}{2}x+\frac{7}{6}x^2++o\left(x^2\right)}$$

(d) On a :

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{2+x+3x^2+o\left(x^2\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{X}}$$

où $\mathrm{X}=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)$ $\left(\text{on a bien } \mathrm{X}\underset{x\to 0}{\to}0\right)$.

On a : $o(\mathrm{X})=o(x)$, puis $\mathrm{X}^2=\frac{x^2}{4}+o(x^2)$, donc : $o(\mathrm{X}^2)=o(x^2)$.

D'après le cours, $\frac{1}{1+\mathrm{X}}=1-\mathrm{X}+\mathrm{X}^2+o(\mathrm{X}^2)$. On en déduit que :

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{X}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{X}+\mathrm{X}^2+o(\mathrm{X}^2)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x^2+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}x^2+o(x^2)\right)$$
$$=\boxed{\frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{5}{8}x^2+o(x^2)}$$

Solution (exercice 2) Énoncé

1. Le domaine de définition de f est $\mathscr{D}_f=\left\{x\in\mathbb{R}^*,\ \frac{e^x-1}{x}>0\right\}$. Un tableau de signes permet de trouver le domaine de définition.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
$\frac{e^x-1}{x}$		$+$	||	$+$	

On en déduit que : $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^*}$.

2. Au voisinage de 0 :

- $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$.
- On en déduit que $\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)$.
- Ainsi, $f(x)=\ln\left(1+\underbrace{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}_{\mathrm{X}}\right)$ avec $\underbrace{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}_{\mathrm{X}}\underset{x\to 0}{\to}0$.
- On a : $o(\mathrm{X})=o(x)$, puis $\mathrm{X}^2=\frac{x^2}{4}+o(x^2)$, donc : $o(\mathrm{X}^2)=o(x^2)$.

- D'après le cours, $\ln(1+X) = X - \dfrac{X^2}{2} + o(X^2)$. On en déduit que :
$$f(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{4} + o(x^2)\text{, d'où, après simplifications :}$$
$$\boxed{f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)}$$

3. Par troncature, f admet donc un DL d'ordre 1 en 0 :
$$f(x) = 0 + \frac{1}{2}x + o(x).$$
f est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ et la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 avec $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

4. L'équation de T_0 est donnée par les termes d'ordre inférieurs ou égaux à 1 dans le DL en 0 de f, donc : $\boxed{T_0 : y = \dfrac{x}{2}}$.

On a de plus : $\quad f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x^2}{24} + o(x^2)$.
D'après le cours, la courbe représentative de f est donc au-dessus de T_0 au voisinage de 0 (à gauche et à droite de 0).

Solution (exercice 3) Énoncé

1. Utilisons la « méthode Vect » :
$$\begin{aligned}F &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad -x+y+z=0 \quad \text{et} \quad 4x-2y+t=0\right\}\\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad z = x-y \quad \text{et} \quad t = -4x+2y\right\}\\ &= \left\{(x,y,x-y,-4x+2y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}\\ &= \left\{x(1,0,1,-4) + y(0,1,-1,2), (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left((1,0,1,-4);(0,1,-1,2)\right)\end{aligned}$$
Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E.
La famille $\mathscr{B}_F = ((1,0,1,-4);(0,1,-1,2))$ est libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires) et génératrice (par définition) de F donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de F}}$ et on en déduit que $\boxed{\dim F = 2}$.

2. (a) Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0_{\mathbb{R}^4}$. On obtient le système linéaire suivant :
$$(S) : \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ \quad - 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0\\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}\\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 & \mathbf{L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3}\\ 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 & \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = -5\lambda_3\\ \lambda_2 = 2\lambda_3\end{cases}$$
Ainsi, en prenant par exemple $\lambda_3 = 1$ (qui joue ici le rôle d'inconnue secondaire), on obtient $\lambda_2 = 2$ puis $\lambda_1 = -5$ ce qui conduit à la relation de liaison :
$$-5a + 2b + c = 0_{\mathbb{R}^4}$$
On en déduit que : $\boxed{\text{la famille } (a,b,c) \text{ est une famille liée.}}$

(b) Ayant $G = \mathrm{Vect}(a,b,c)$ avec c combinaison linéaire de a et de b (car $c = 5a - 2b$ d'après la question précédente), on obtient que $\mathrm{Vect}(a,b,c) = \mathrm{Vect}(a,b)$ (propriétés du Vect) donc $G = \mathrm{Vect}(a,b)$.
La famille $\mathscr{B}_G = (a,b)$ est libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires) et génératrice de G (par définition) donc :
$$\boxed{\mathscr{B}_G = (a,b) \text{ est une base de G et } \dim G = 2}$$

3. 3.1) Soit $u \in F \cap G$, alors $u \in F$ et $u \in G$: on vient alors de démontrer les inclusions d'ensembles demandées.

3.2) Ayant $F \cap G \subset F$ avec $F \cap G$ un sous-espace vectoriel de E (d'après le cours), on obtient que $\dim(F \cap G) \leq \dim F$ soit $\dim(F \cap G) \leq 2$ (car $\dim F = 2$), d'où le résultat.

3.3) Les coordonnées de d vérifient bien les conditions d'appartenance à F :
$$-1 + 4 - 3 = 0 \quad \text{et} \quad 4 - 2 \times 4 + 4 = 0, \quad \text{donc : } \boxed{d \in F}$$
En outre, on remarque que $b - a = d$ ayant
$$(2,7,-3,6) - (1,3,0,2) = (1,4,-3,4).$$
Ainsi, d est combinaison linéaire de a et b : $d \in \mathrm{Vect}(a,b)$, donc $\boxed{d \in G}$.
On obtient bien : $\boxed{d \in F \cap G}$.
L'ensemble $F \cap G$ étant un espace vectoriel : $\quad \mathrm{Vect}(d) \subset F \cap G$.
Or, (d) est une famille libre (car constituée d'un seul vecteur non nul) et génératrice (par définition) de $\mathrm{Vect}(d)$ donc $\dim \mathrm{Vect}(d) = 1$.
De l'inclusion $\mathrm{Vect}(d) \subset F \cap G$ découle l'inégalité :

$$\dim \mathrm{Vect}(d) \leq \dim(\mathrm{F}\cap \mathrm{G}), \quad \text{soit :} \quad 1 \leq \dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}).$$

D'où le résultat : $\boxed{\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) \in \{1,2\}}$.

3.4) **(i)** En supposant que $\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) = 2$, on a :

$\begin{cases} \mathrm{F}\cap\mathrm{G} \subset \mathrm{F} \\ \dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} \end{cases}$ donc par inclusion et égalité des dimensions : $\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \mathrm{F}$

De la même façon,

$\begin{cases} \mathrm{F}\cap\mathrm{G} \subset \mathrm{G} \\ \dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) = \dim \mathrm{G} \end{cases}$ donc par inclusion et égalité des dimensions : $\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \mathrm{G}$

Ainsi : $\mathrm{F} = \mathrm{G}$ car ces deux ensembles sont égaux à $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$.

(ii) $a \in \mathrm{G}$ puisque G est l'espace vectoriel engendré par a, b et c, mais $a \notin \mathrm{F}$ puisque le coordonnées de $a = (1,3,0,2)$ ne vérifient pas, par exemple, l'équation $-x+y+z=0$ (ayant $\underbrace{-1+3+0}_{=2} \neq 0$). Ainsi, l'égalité $\mathrm{F} = \mathrm{G}$ n'est pas vérifiée (l'égalité d'ensembles $\mathrm{F} = \mathrm{G}$ signifie $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ et $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}$, or l'inclusion $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}$ est fausse car tout élément de G n'est pas élément de F, à l'instar du vecteur a).

(iii) On a démontré par l'absurde que $\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})$ ne pouvait pas être égal à 2, la seule possibilité restante est $\boxed{\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) = 1}$

4. **4.1)** F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donc ils contiennent le vecteur nul. Ainsi,

$$0_{\mathbb{R}^4} = \underbrace{0_{\mathbb{R}^4}}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{0_{\mathbb{R}^4}}_{\in \mathrm{G}} \in \mathrm{F}+\mathrm{G}.$$

4.2) Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(w_1,w_2) \in (\mathrm{F}+\mathrm{G})^2$. Il existe $(f_1,f_2) \in \mathrm{F}^2$ et $(g_1,g_2) \in \mathrm{G}^2$ tels que :

$$w_1 = f_1 + g_1 \quad \text{et} \quad w_2 = f_2 + g_2.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda w_1 + \mu w_2 &= \lambda(f_1+g_1) + \mu(f_2+g_2) \\ &= \lambda f_1 + \mu f_2 + \lambda g_1 + \mu g_2. \end{aligned}$$

Or, $(f_1,f_2) \in \mathrm{F}^2$ donc $\lambda f_1 + \mu f_2 \in \mathrm{F}$ car F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. De même, $(g_1,g_2) \in \mathrm{G}^2$ donc $\lambda g_1 + \mu g_2 \in \mathrm{G}$ car G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

D'où : $\lambda w_1 + \mu w_2 = \underbrace{\lambda f_1 + \mu f_2}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{\lambda g_1 + \mu g_2}_{\in \mathrm{G}} \in \mathrm{F}+\mathrm{G}.$

4.3) $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est une partie non-vide de $\mathbb{R}^4$ (car $0_{\mathbb{R}^4} \in \mathrm{F}+\mathrm{G}$) stable par combinaison linéaire donc $\boxed{\mathrm{F}+\mathrm{G} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$

5. **5.1)** Soit $\mathscr{B} = \mathscr{B}_\mathrm{F} \cup \mathscr{B}_\mathrm{G} = ((1,0,1,-4);(0,1,-1,2);(1,3,0,2);(2,7,-3,6))$

Montrons que la famille $\mathscr{B}$ génère $\mathrm{F}+\mathrm{G}$. Ici, nous allons montrer que tout vecteur de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathscr{B}$.

Soit $w \in \mathrm{F}+\mathrm{G}$. Il existe $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$ tel que $w = f+g$. Or, la famille $\mathscr{B}_\mathrm{F} = ((1,0,1,-4);(0,1,-1,2))$ génère F (en tant que base de F) donc il existe $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \lambda_1(1,0,1,-4) + \lambda_2(0,1,-1,2)$. En outre, la famille $\mathscr{B}_\mathrm{G} = (a,b) = ((1,3,0,2),(2,7,-3,6))$ génère G (en tant que base de G) donc il existe $(\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g = \lambda_3(1,3,0,2) + \lambda_3(2,7,-3,6)$.

On en déduit l'existence de 4 nombres réels $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ tels que :

$$w = \lambda_1(1,0,1,-4) + \lambda_2(0,1,-1,2) + \lambda_3(1,3,0,2) + \lambda_4(2,7,-3,6).$$

Ainsi : $\boxed{\text{la famille } \mathscr{B} \text{ est génératrice de } \mathrm{F}+\mathrm{G}}$

5.2) Le rang de $\mathscr{B} = ((1,0,1,-4);(0,1,-1,2);(1,3,0,2);(2,7,-3,6))$ vaut

$$\mathrm{Rg}(\mathscr{B}) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftrightarrow L_3 - L1$
$L_4 \leftarrow L_4 + 4L_1$

$$= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$

$$= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 3.$$

Comme $\mathrm{F}+\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ (d'après la question précédente), on a :

$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \underbrace{\dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{B}))}_{=\mathrm{Rg}(\mathscr{B})} = 3$$

5.3) Par les questions précédentes,

$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = 3 \quad \text{et} \quad \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) = 2+2-1 = 3,$$

d'où l'égalité demandée.