Chapitre # (AN) 1

Fonctions de deux variables

Résumé & Plan

Dans les situations concrètes, il est rare qu'un résultat ne dépende que d'un seul paramètre. Même si nous utilisons cette simplification couramment, on ne peut pas toujours s'y réduire. D'un point de vue mathématique, la dépendance à plusieurs paramètres revient à définir une fonction de plusieurs variables. Dans ce chapitre, pour simplifier, nous nous limiterons à deux paramètres (variables) et nous supposerons que cette fonction est à valeurs réelles.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1. FONCTIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES À VALEURS DANS $\mathbb{R}$

Les fonctions de deux variables sont en général définis sur des sous-domaines particuliers du plan $\mathbb{R}^2$.

1.1. Sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

Définition 1 | Demi-plan
Un demi-plan ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ de la forme
$$\mathscr{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax+by+c<0\right\}$$
où (a,b,c) sont trois réels fixés.

Remarque 1 Il s'agit en pratique d'une portion du plan située « au-dessus » ou « en-dessous » d'une droite.

Définition 2 | Disque
Un disque ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par
$$\mathscr{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\mathrm{R}^2\right\}$$
où (x_0, y_0, R) sont trois réels fixés.

Remarque 2 Il s'agit en pratique d'une portion du plan délimité par un cercle.

Définition 3 | Pavé du plan
Un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ de la forme
$$\mathscr{D} = \mathrm{I}\times\mathrm{J}$$
où I et J sont deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

Exemple 1

★ $\mathscr{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -2x + 1 < 0\}$ est un demi-plan ouvert de $\mathbb{R}^2$

★ $\mathscr{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > x - 3\}$ est un demi-plan ouvert de $\mathbb{R}^2$

★ $\mathscr{D}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + (y+2)^2 < 1\}$ est un disque ouvert de $\mathbb{R}^2$

★ $\mathscr{D}_4 =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ est un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$

★ $\mathscr{D}_5 =]0, 1[\times]0, 1[$ est un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$

★ $\mathscr{D}_6 =]-\pi, \pi[\times]-1, 1[$ est un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$

Définition 4 | Fonction à deux variables
On appelle fonction réelle de deux variables réelles toute fonction dont le domaine de départ est inclus dans $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f \left| \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

Exemple 2 On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto \ln(2x+y+1)$.

Exemple 3 On considère la fonction $g : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Remarque 3 Dans la suite, on étudiera essentiellement des fonctions définies sur des pavés ouverts.

1.3. Représentation graphique

Les fonctions à une variable sont représentées par une courbe dans le plan définie par l'ensemble des points : $(x, f(x))$ *(pour x parcourant le domaine de définition de f)*

De manière analogue, on représente une fonction à deux variables par l'ensemble des points : $(x, y, f(x, y))$ *(pour x et y parcourant le domaine de définition de f)* dans l'espace : il s'agit alors d'une surface.

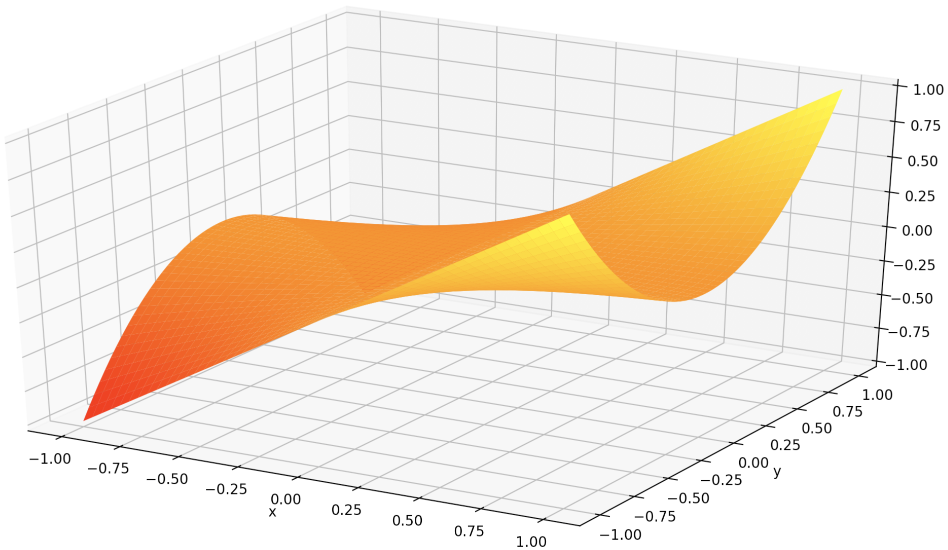
Définition 5 | Surface représentative

Soit D un pavé ouvert du plan. La **surface représentative** d'une fonction $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ est définie par

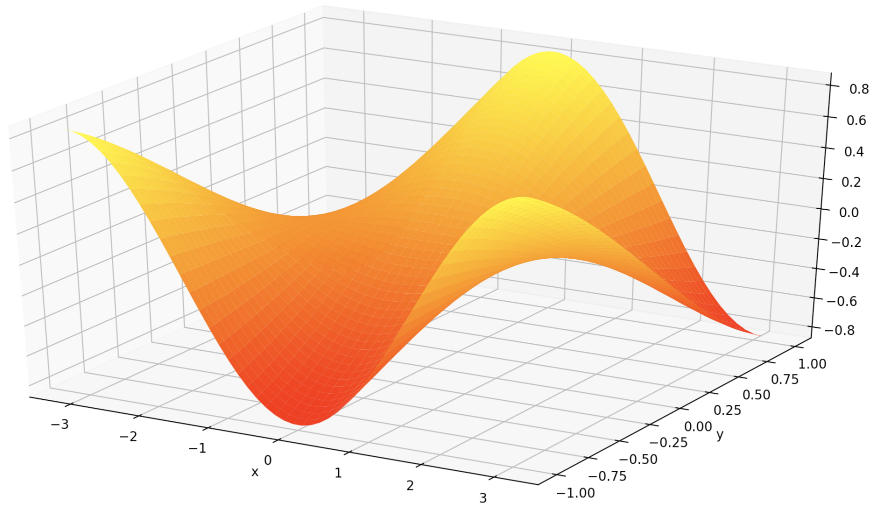
$$\mathscr{S} = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathrm{D}\}$$

Exemple 4

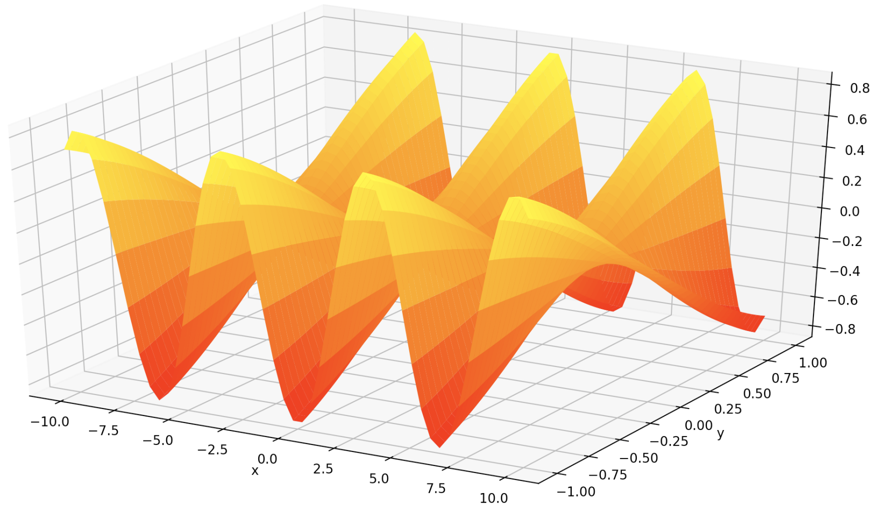
- Soit $\mathrm{D} =]-1;1[\times]-1;1[$ et $f \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy^2 \end{array} \right.$. On peut tracer sa surface représentative :



- Soit $\mathrm{D} =]-\pi;\pi[\times]-1;1[$ et $g \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \cos(x)\sin(y) \end{array} \right.$. On peut tracer sa surface représentative :



On peut tracer g sur un pavé différent : si $\mathrm{D} =]-10;10[\times]-1;1[$, la surface représentant g est :



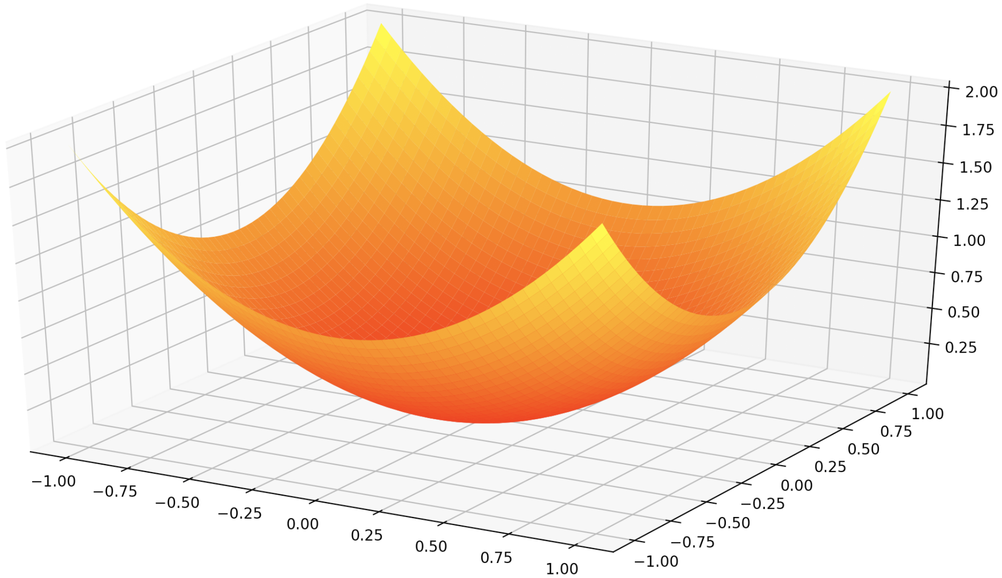
1.4. Lignes de niveau

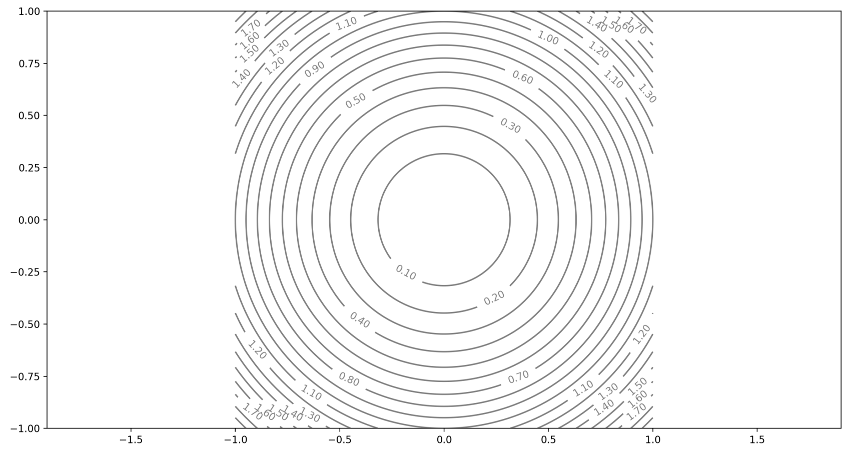
Définition 6 | Lignes de niveau

Soit D un pavé ouvert du plan, $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$. L'intersection de la surface $\mathscr{S}$ représentant f sur D avec le plan d'équation $z = k$ est appelée **la ligne de niveau k de la surface $\mathscr{S}$**.

Exemple 5 On considère $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array} \right.$ et on note $\mathscr{S}$ sa surface représentative.

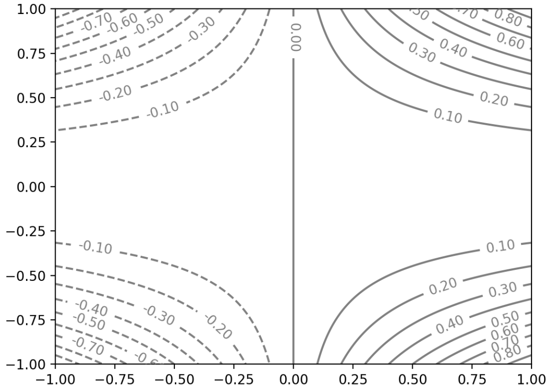
Déterminer les lignes de niveaux de $\mathscr{S}$. Soit $k \in \mathbb{R}$.



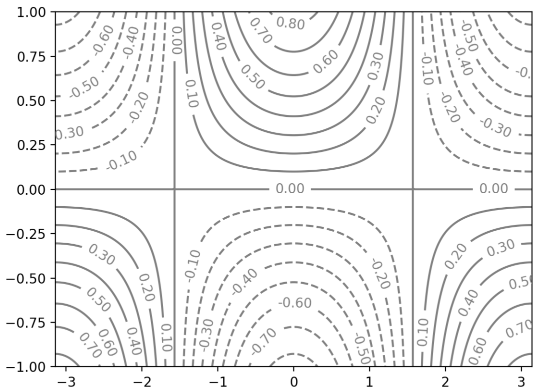


Exemple 6 On reprend les exemples de la partie précédente :

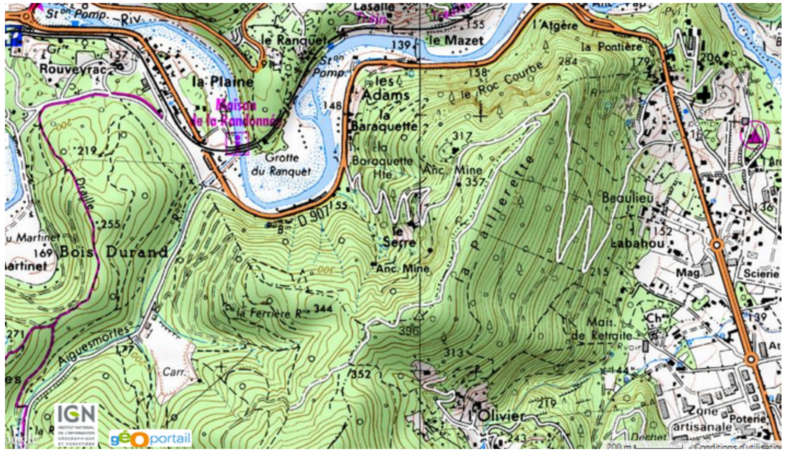
- Soit $D =]-1;1[\times]-1;1[$ et $f \left| \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy^2 \end{array} \right.$.
  On peut tracer les lignes de niveau de f :



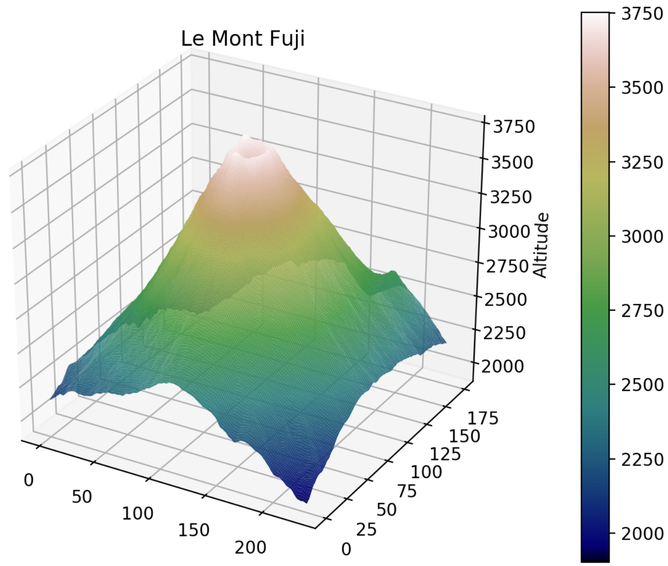
- Soit $D =]-\pi;\pi[\times]-1;1[$ et $g \left| \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \cos(x)\sin(y) \end{array} \right.$.
  On peut tracer les lignes de niveau de g :

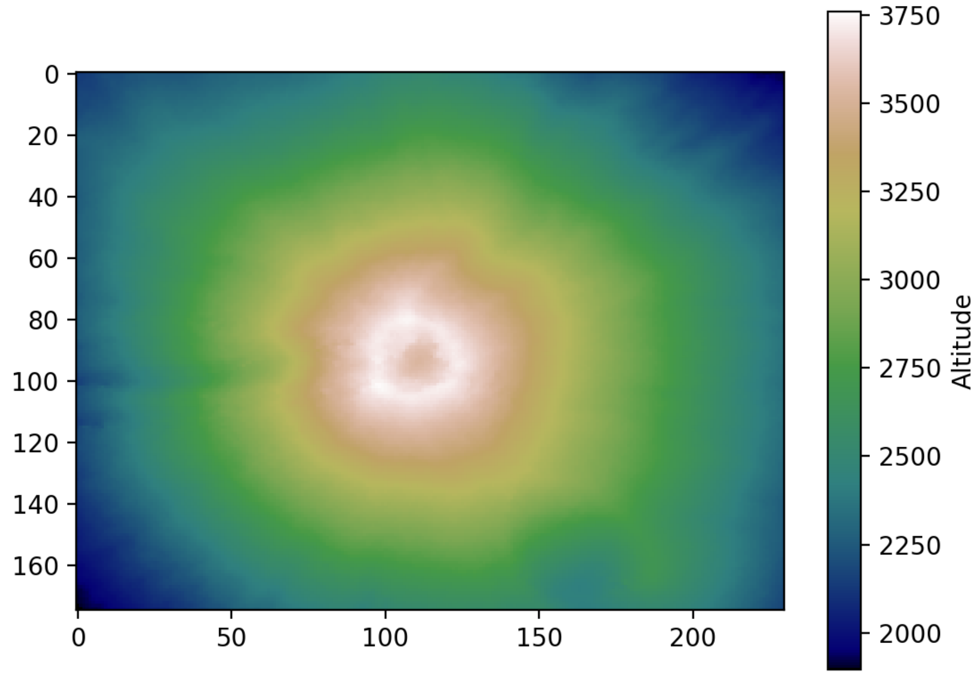


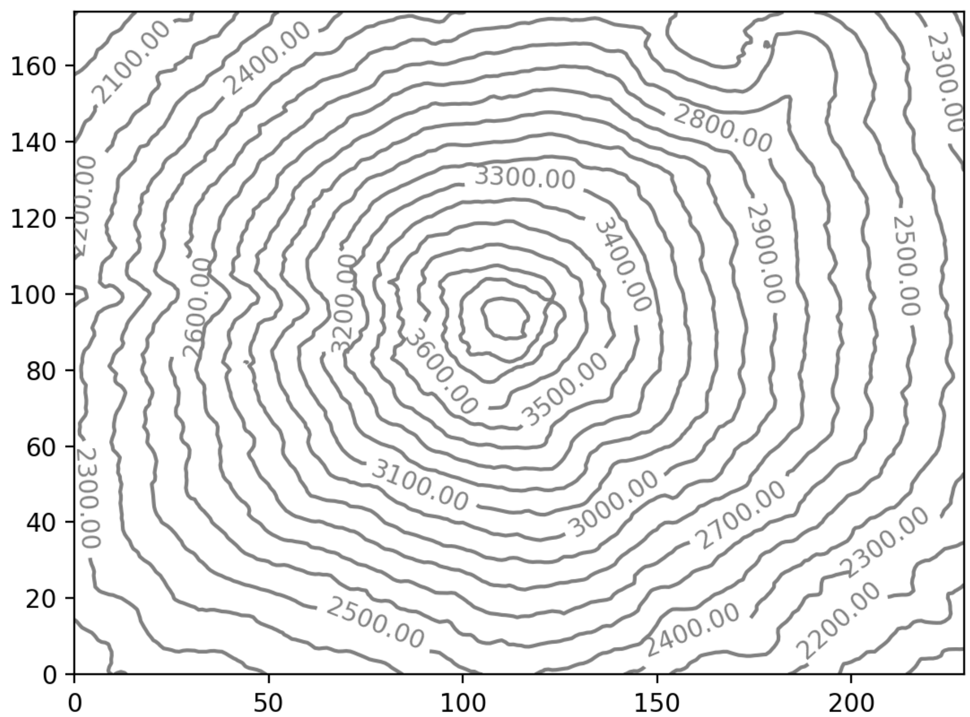
Remarque 4 On appelle ces objets des courbes de niveau en référence à la cartographie. Si on interprète la surface de la fonction comme un relief, alors les lignes de niveau correspondent aux points de même altitude.



Exemple 7 On modélise le Mont Fuji au Japon par une fonction f à deux variables (x,y) où (x,y) représente une position dans le plan : on considère que les points (x,y) et $(x+1,y)$ (resp. (x,y) et $(x,y+1)$) sont séparés par une distance angulaire d'une seconde d'arc. $f(x,y)$ correspond alors à l'altitude, en mètres, par rapport au niveau de la mer du relief montagneux à la position (x,y).
On donne ci-dessous une représentation de cette fonction avec une surface, sur un pavé avec un code couleur et avec des lignes de niveaux :







1.5. Fonctions partielles

Définition 7 | Fonctions partielles
Soit D un pavé ouvert du plan et $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$ un point fixé. On définit :
★ la fonction partielle en x : $f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$,
★ la fonction partielle en y : $f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$.

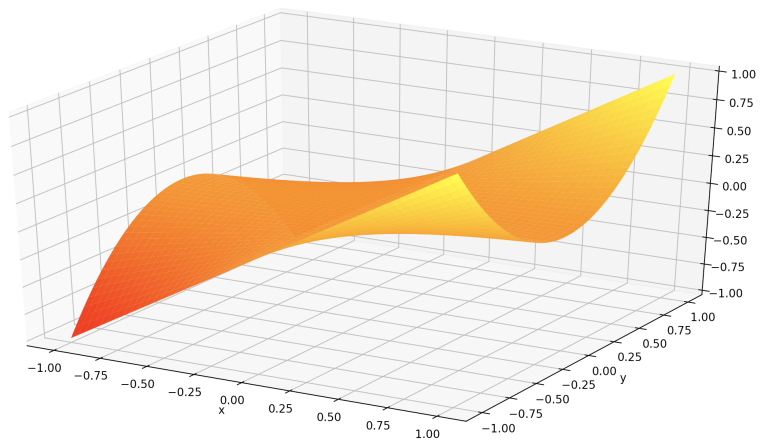
Exemple 8 Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 9 Soit $f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \ln(x)y + e^{xy} \end{array} \right.$. Donner les fonctions partielles de f en $(1,2)$.

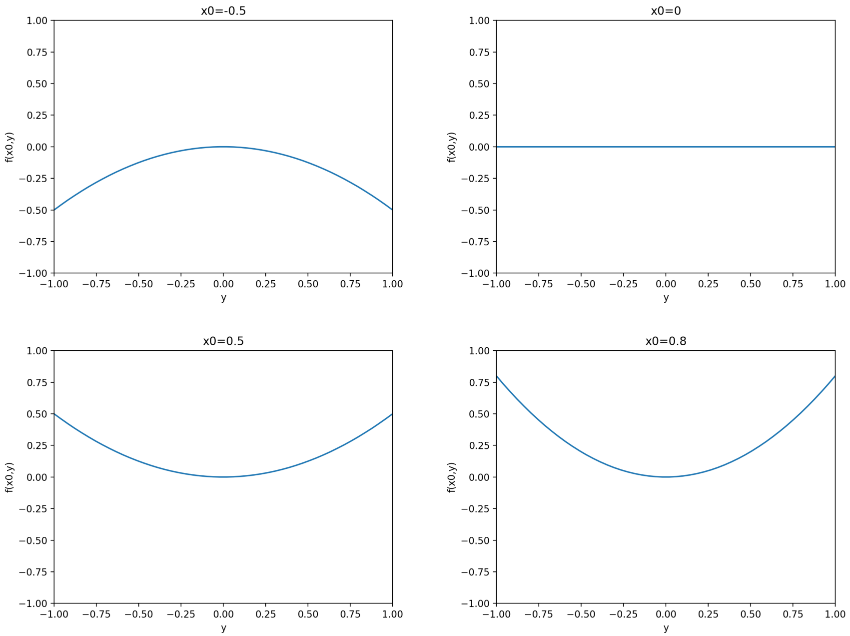
Remarque 5 Il faut bien noter que pour f_{y_0}, la valeur de y est fixée égale à y_0.
De même pour f_{x_0} la valeur de x est fixée égale à x_0.

Exemple 10 Soit $f(x,y) = xy^2$.
Étudier les fonctions partielles de f pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ quelconque.

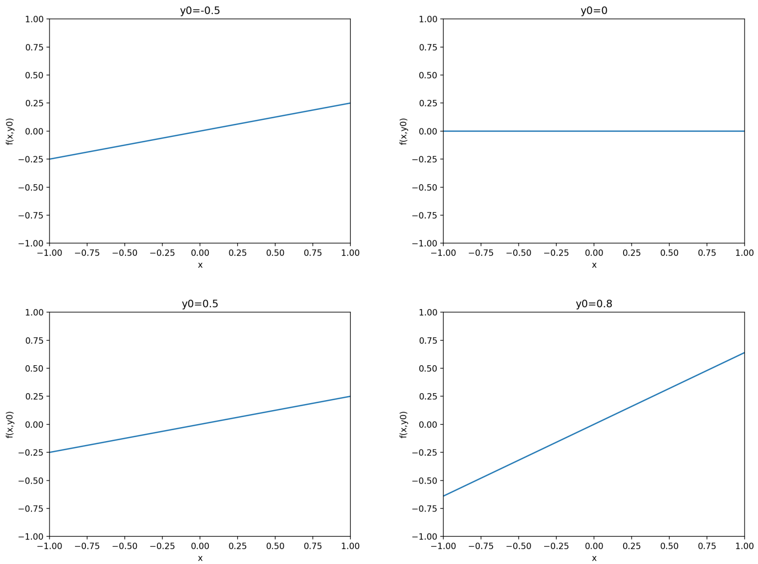
On redonne ici la surface représentant la fonction f avec $D =]-1,1[\times]-1,1[$.



Tracer la courbe représentant la fonction partielle f_{x_0} revient à effectuer une coupe de la surface représentant f selon le plan $x = x_0$.



Tracer la courbe représentant la fonction partielle f_{y_0} revient à effectuer une coupe de la surface représentant f selon le plan $y = y_0$.



2. CONTINUITÉ

Définition 8 | Continuité

On rappelle que, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on définit $||(a,b)|| = \sqrt{a^2+b^2}$.
Soit D un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Soit $(x_0, y_0) \in D$.
On dit que f **est continue en** (x_0, y_0) si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \qquad ||(x,y)-(x_0,y_0)|| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

(Autrement dit, si (x,y) se rapproche de (x_0,y_0), alors $f(x,y)$ se rapproche de $f(x_0,y_0)$)

Notation

On note $\mathscr{C}^0(D)$ l'ensemble des fonctions continues sur D.

Remarque 6

- Cette définition rigoureuse est beaucoup trop abstraite pour l'usage que l'on veut en faire. En pratique les fonctions continues sont celles dont les surfaces représentatives « n'ont pas de trous ».
- La quasi-totalité des fonctions de deux variables que vous rencontrerez seront continues et on ne vous demandera normalement jamais de prouver la continuité d'une fonction de deux variables. Une éventuelle (et rare) justification utilisera le résultat suivant :

Proposition 1 | Continuité et opérations

Soit D un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions de deux variables. Soit $(x_0, y_0) \in D$. On suppose que f et g sont continues en (x_0, y_0).
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

- λf est continue en (x_0, y_0)
- $f + g$ est continue en (x_0, y_0)
- $f \times g$ est continue en (x_0, y_0)
- Si $g(x_0, y_0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en (x_0, y_0).

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $z_0 = f(x_0, y_0)$. Alors $h \circ f$ est continue en (x_0, y_0).

Attention

La continuité de f implique la continuité des fonctions partielles, par contre, **la réciproque est fausse**.

Exemple 11 Soit $f \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

3. CALCUL DIFFÉRENTIEL

3.1. Dérivées partielles

Définition 9 | Fonction dérivable par rapport à l'une de ses variables

Soit D un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$ et f_{y_0}, f_{x_0} les fonctions partielles en (x_0, y_0).

- ⋆ Si f_{y_0} est dérivable en x_0 alors on dit que f **admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en** (x_0, y_0) et on note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{y_0}(x_0, y_0) \qquad \text{(dérivée par rapport à la première variable)}$$

- ⋆ De manière similaire si f_{x_0} est dérivable en y_0 on dit alors que f **admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en** (x_0, y_0) et on note

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x_0}(y_0) \qquad \text{(dérivée par rapport à la seconde variable)}$$

Remarque 7 $\boxed{\text{Interprétation graphique}}$:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la valeur de la pente de la surface $\mathscr{S}$ représentant f dans la direction x au point (x_0, y_0).

De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la valeur de la pente de la surface $\mathscr{S}$ dans la direction y au point (x_0, y_0).

Définition 10 | Fonctions dérivées partielles, classe $\mathscr{C}^1$

Soit D un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si f admet des dérivées partielles en tout point de D, on définit alors les **fonctions dérivées partielles**

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \right. \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial y} f(x,y) \end{array} \right.$$

Si ces deux fonctions sont continues alors on dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et on note $\mathscr{C}^1(\mathrm{D})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.

Exemple 12 On considère $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array} \right.$.

Exemple 13 Déterminer les fonctions dérivées partielles associées aux fonctions suivantes :

(a) $f \left| \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy^2 \end{array} \right.$ avec $D =]-1;1[\times]-1;1[$.

(b) $g \left| \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \cos(x)\sin(y) \end{array} \right.$ avec $D =]-\pi;\pi[\times]-1;1[$.

3.2. Approximation locale

Question : Si $x \simeq x_0$ et $y \simeq y_0$, que peut-on dire de la variation

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \quad ?$$

Rappel : Pour une fonction f d'une variable, on a (au voisinage de x_0) :

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0).$$

C'est le DL d'ordre 1 de la fonction f en x_0. On peut alors dire que :

$$f(x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)(x-x_0)$$

si x est proche de x_0 (petite variation). Le résultat suivant généralise cela.

Théorème 1 | DL à l'ordre 1

Soit D un pavé de $\mathbb{R}^2$ et si $f \in \mathscr{C}^1(D)$ et $(x_0,y_0) \in D$.
Le $\mathrm{DL}_1((x_0,y_0))$ de f est donné par :

$$f(x,y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\times(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\times(y-y_0) + o(x-x_0,y-y_0).$$

Remarque 8 De manière équivalente, on peut écrire

$$\boxed{f(x_0+h,y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o(h,k).}$$

Exemple 14 On considère $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array} \right.$. Le $\mathrm{DL}_1(1,3)$ de f est donné par :

Exemple 15 Soit $f:(x,y)\mapsto x^2y-y^2$.
Que vaut $f(2,3)$? Donner, sans calculatrice, une valeur approchée de $f(2.01,3.02)$.

4. GRADIENT

Définition 11 | Gradient
Soit D un pavé de $\mathbb{R}^2$ et soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur D. Le **gradient de f au point** $(x,y)\in \mathrm{D}$ est

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Remarque 9
- La fonction ∇f est donc une application définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
- Le gradient est un vecteur du plan qui indique la direction de **plus forte pente**. Plus la norme du gradient est importante, plus la pente est forte. En montagne, il faut donc suivre la direction du gradient pour descendre/monter le plus rapidement.

4.1. Recherche d'extrema

Définition 12 | Extremum local ou global
Soient $f:\mathrm{D}\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ et $a=(x_0,y_0)\in \mathrm{D}$. On dit que
1. f présente un maximum (respectivement un minimum) global en a si
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)\leq f(x_0,y_0)\ \ (\text{resp.}\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)\geq f(x_0,y_0))$$
2. f présente un maximum (respectivement un minimum) local en a s'il existe un voisinage $\mathrm{V}_a=]x_0-\alpha,x_0-\alpha[\times]y_0-\beta,y_0-\beta[$ de a tel que
$$\forall(x,y)\in \mathrm{V}_a,\quad f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$$
(respectivement $\forall(x,y)\in \mathrm{V}_a,\quad f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$)
3. f présente un extremum en a si f présente un maximum ou un minimum en a.

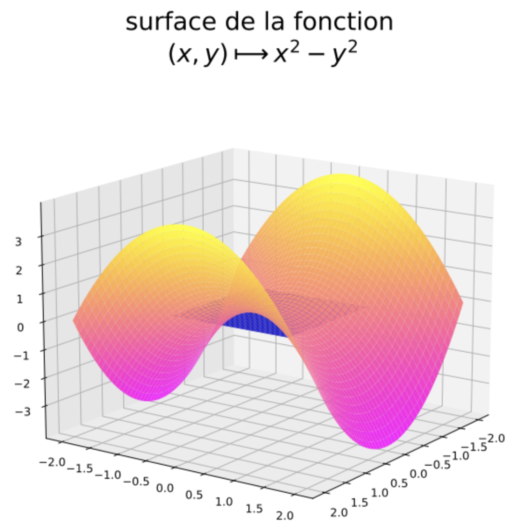
Un maximum global est évidemment *a fortiori* un maximum local. On appelle extremum de f un point qui est un minimum ou un maximum de f.

Définition 13 | Point critique
Lorsque $\nabla f(x_0,y_0)=0$, on dit que le point (x_0,y_0) est un point critique de f.

Théorème 2 | Recherche d'extrema
Soit D un pavé de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$. Si f atteint un maximum ou un minimum local en (x_0, y_0) alors
$$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0).$$

Exemple 16 Considérons la fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array} \right.$

Remarque 10 La réciproque est fausse, si $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ on peut également se trouver en présence d'un point dit « point selle » ou « point col ». Par exemple si $f(x,y) = x^2 - y^2$ alors $\nabla f(0,0) = 0$ mais f n'atteint pas d'extremum local en $(0,0)$.



Ainsi, déterminer les points critiques d'une fonction ne fournit pas les extrema de celle-ci, mais on peut **rechercher les extrema parmi les points critiques**.

Exemple 17 Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$. Déterminer les éventuels points critiques puis les extrema locaux de f.

4.2. Dérivation d'une fonction de la forme $t \mapsto f(x(t),y(t))$

Théorème 3 | Règle de la chaîne

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ avec $a < b$ et $c < d$. Soient

$$x : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow &]a,b[\\ t & \longmapsto & x(t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad y : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow &]c,d[\\ t & \longmapsto & y(t) \end{array} \right.$$

deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et soit $f :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe $\mathscr{C}^1$.

On considère la fonction $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(x(t),y(t)) \end{array} \right.$.

Alors g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et on a

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)).$$

Exemple 18 Calculer la dérivée de $g : t \mapsto f(\cos(t),\sin(t))$, où $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy^2 \end{array} \right.$.

4.3. Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 14 | Dérivées partielles d'ordre 2

On définit, lorsqu'elles existent, **les dérivées partielles d'ordre 2 de f** :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$$

Si les dérivées partielles d'ordre 2 de f sur un pavé D existent et sont continues, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D.

Exemple 19 Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction

$f : (x,y) \mapsto x^3y^2 + e^x\cos(x+y)$.

Théorème 4 | Théorème de Schwarz

Soit D un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f de classe $\mathscr{C}^2$ sur D. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

5. EXERCICES

Dérivées partielles : calcul

Exercice 1 | [Solution] Déterminer lorsqu'elles existent les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes :

(a) $f : (x, y) \longmapsto \cos(x+y) + \sin(x-y)$
(b) $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$
(c) $f : (x, y) \longmapsto \arctan\left(\dfrac{x^2}{1+y^2}\right)$

Exercice 2 | [Solution] Soit V une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de la fonction Φ définie par

$$\forall t > 0, \quad \Phi(t) = \mathrm{V}(t^2+1, e^t + \ln t - 1).$$

Lignes de niveaux

Exercice 3 | [Solution] Tracer les lignes de niveau de la fonction

$$f : (x, y) \longmapsto \ln(1+x^2+y^2).$$

Recherche d'extrema

Exercice 4 | [Solution] Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points critiques.

(a) $f : (x, y) \longmapsto (x+y)e^{-x^2-y^2}$
(b) $f : (x, y) \longmapsto xe^y + ye^x$
(c) $f : (x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$

Exercice 5 | [Solution] Étudier les extrema de

$$g : (x, y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy.$$

On pourra exprimer $g(x, y) - g(1, 1)$ en fonction de $x-1$ et $y-1$.

EDP : « équation aux dérivées partielles »

Exercice 6 | [Solution] Déterminer précisément, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant la condition donnée.

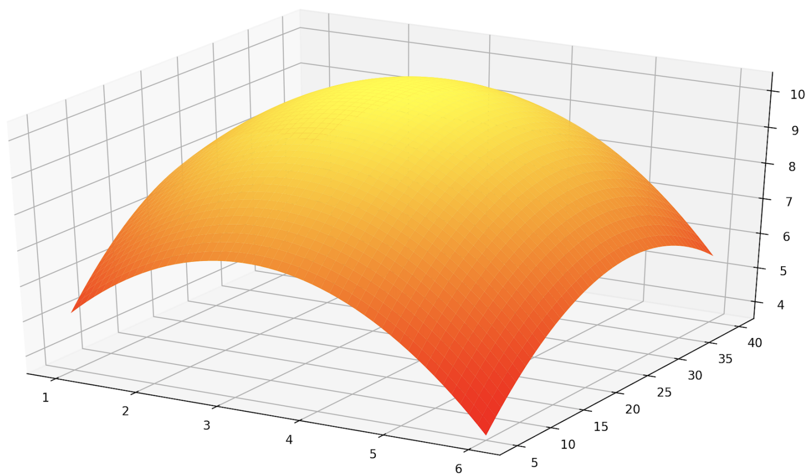
(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0.$
(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$
(c) $\dfrac{\partial f}{\partial xy} = 0.$
(d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^y.$
(e) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x.$
(f) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3f.$

Modélisation

Exercice 7 | [Solution] Des espèces d'insectes ont été inventoriées dans plusieurs milieux sur une colline calcaire, selon une échelle de dynamique végétale ν depuis la pelouse sèche (valeur 1) jusqu'au sous-bois (valeur 6) et la hauteur h en cm de la végétation herbacée (entre 5 et 40 cm). Le nombre NBI d'espèces d'insectes est modélisé par la fonction

$$f(\nu, h) = -0{,}466\nu^2 + 2{,}960\nu - 0{,}00655h^2 + 0{,}34625h + 1{,}08725.$$

représentée ci-dessous par un graphe en dimension 3 :



1. Légender la figure.
2. Quelle est la valeur du milieu où l'on attend la plus grande richesse en espèce d'insectes ?
3. Quelle est cette richesse maximale ?
4. En un point quelconque $\mathrm{M}(\nu, h)$, quelle est la direction dans laquelle la fonction f varie le plus vite ? Quelle est la valeur $\Delta(\nu, h)$ de cette variation maximale ?
5. Étudier les positions des éventuels extremums de cette fonction Δ.

Exercice 8 | [Solution] On souhaite modéliser l'évolution conjointe de deux populations. On modélise l'évolution des effectifs $x(t)$ des proies et $y(t)$ des prédateurs par le système différentiel (1) suivant :

$$(1) : \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx - pxy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -my + qxy, \end{cases}$$

où r, p, m, q sont des constantes positives.

1. Sauriez-vous donner la signification des constantes r, p, m, q ?
2. **2.1)** Que devient le système (1) s'il n'y a pas de prédateur? Comment évolue alors la poopulation de proies?
   2.2) Que devient le système (1) s'il n'y a pas de proie? Comment évolue alors la poopulation de prédateurs?
3. On pose $s = rt$, $\overline{x}(s) = \dfrac{q}{r}x(t)$ et $\overline{y}(s) = \dfrac{p}{r}y(t)$. Montrer que le système (1) peut se réécrire :
$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{ds} = \overline{x} - \overline{xy}, \\ \dfrac{d\overline{y}}{ds} = -a\overline{y} + \overline{xy}, \end{cases}$$
   où a est une constante à déterminer.
4. Dans la suite, on note (sans barre) :
$$(2) : \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = x - xy, \\ \dfrac{dy}{ds}' = -ay + xy, \end{cases}$$
   On appelle point d'équilibre d'un système d'équations de la forme
$$(*) \begin{cases} x' = g_1(x, y), \\ y' = g_2(x, y), \end{cases}$$
   un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que les membres de droite des équations différentielles s'annulent simultanément pour ces valeurs. Ainsi, un point d'équilibre de (2) est une solution de
$$\begin{cases} x - xy = 0, \\ -ay + xy = 0, \end{cases}$$
   4.1) Déterminer les points d'équilibre du système (2).
   4.2) En terme de dynamique des populations, que représentent ces points d'équilibre?
   4.3) Donner une interprétation biologique des points d'équilibre obtenus.
5. On suppose dans cette question que l'évolution des proies est limitée par leur environnement et que cette population est en interaction avec une population de prédateurs :
$$(3) : \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = x\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - xy, \\ \dfrac{dy}{ds} = -ay + xy, \end{cases}$$
   où a et K sont des constantes strictement positives et différentes.

1. Que se passe-t-il lorsque K est très grand? Et quand $y = 0$?
2. Déterminer les points d'équilibre du système (3). Donner une interprétation physique de chaque point d'équilibre obtenu.
3. Pour un système différentiel de la forme $(*)$, on construit une matrice $\mathscr{J}(x, y)$, appelée matrice jacobienne, définie par :
$$\mathscr{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$
   3.1) Calculer la matrice jacobienne associée au système (3).
   3.2) Évaluer la matrice jacobienne aux points d'équilibre trouvés à la question précédente.