

Chapitre # (ALG) 12

Géométrie

- 1 **Vecteurs du plan et de l'espace**
- 2 **Projection orthogonale et produit scalaire**
- 3 **Droites et cercles dans le plan** ..
- 4 **Droites et plans dans l'espace** ..
- 5 **Exercices**

Résumé & Plan

Ce chapitre vise à présenter les rudiments de géométrie analytique (*i.e.* celle faisant appel à des coordonnées).

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre

— Inscription au fronton de l'Académie de Platon

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P]. Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Comme demandé par le programme, ce chapitre se focalise sur quelques notions élémentaires de la géométrie du plan ou de l'espace. Il s'agit des espaces dans lesquels nous évoluons (l'espace à 3 dimensions) ou qui nous servent de support à la représentation (l'espace à 2 dimensions : tableau, feuille, écran...).

Nous ne chercherons donc pas à faire preuve de grande dextérité, ni à développer des concepts théoriques compliqués. Ce chapitre nous sert simplement de support pour des raisonnements géométriques en physique ou en géologie et doit faciliter la visualisation de notions mathématiques abstraites dans tous les chapitres d'algèbre linéaire (systèmes linéaires, matrices, espaces vectoriels, applications linéaires).

N'attendez pas une grande rigueur dans les constructions des objets mathématiques de ce chapitre. Ce n'est pas le but et cela nous emmènerait trop loin. En particulier, nous nous contenterons de la notion intuitive d'angle droit.

Σ Notation

Dans le chapitre, on désigne habituellement par $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormal, et par $\mathcal{E}$ l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormal.

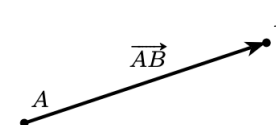
1. VECTEURS DU PLAN ET DE L'ESPACE

1.1. Vecteurs géométriques du plan et de l'espace

Définition 1 | Vecteurs géométriques du plan et de l'espace

On considère deux points A et B distincts du plan (ou de l'espace)

La **translation** qui transforme A en B est appelée **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** .



Définition 2 | Les trois caractéristiques d'un vecteur

On considère deux points A et B distincts du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa **direction** (celle de la droite (AB)),
- sa **norme** (la longueur du segment [AB]), notée $|\overrightarrow{AB}|$,
- son **sens** (de A vers B).

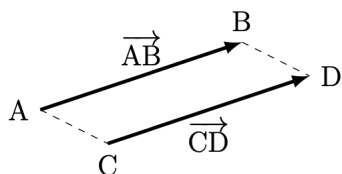
Remarque 1 (A propos du vecteur nul.) Si les points A et B sont confondus ($A = B$), on parle de **vecteur nul**. On le note $\vec{0}$. Par exemple, on a : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ mais aussi : $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$, etc.

Le vecteur nul ne possède pas de direction ni de sens. Sa norme est égale à 0.

Proposition 1 | Vecteurs égaux

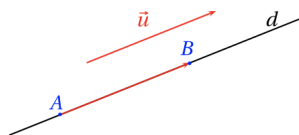
Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les **mêmes caractéristiques**, à savoir si ils ont la **même direction**, le **même sens** et la **même norme**.

Ci-après, on a l'égalité : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Définition 3 | Vecteur directeur d'une droite

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan ou de l'espace. On appelle **vecteur directeur** de $\mathcal{D}$ tout vecteur $\vec{u}$ non nul qui a la même direction que $\mathcal{D}$.



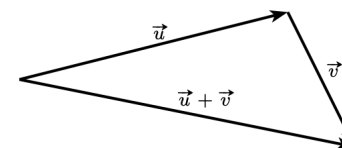
Vecteur directeur

(Deux points distincts A et B du plan ou de l'espace étant donnés, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).)

Définition 4 | Somme, multiplication par un scalaire

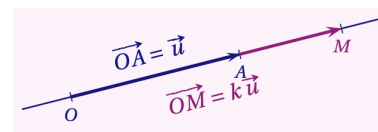
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et k un réel non nul.

- Si on enchaîne deux translations, l'une de vecteur $\vec{u}$ et l'autre de vecteur $\vec{v}$, on obtient une nouvelle translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



- Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul ($\vec{u} \neq \vec{0}$) et k un réel non nul ($k \neq 0$).
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k , noté $k\vec{u}$ est le vecteur caractérisé par :
 - sa direction : $k\vec{u}$ a la même direction que le vecteur $\vec{u}$;

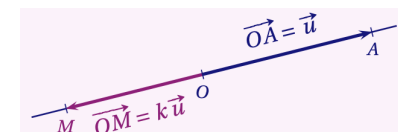
Cas où $k > 0$



- son sens : le vecteur $k\vec{u}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$;
- sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par le réel k

$$\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$$

Cas où $k < 0$



- son sens : le vecteur $k\vec{u}$ est de sens opposé au sens du vecteur $\vec{u}$;
- sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par l'opposé du réel k

$$\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$$

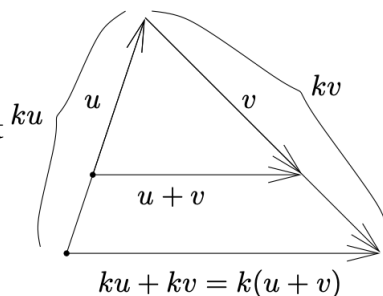
Ce qui s'écrit de façon générale $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$ et se lit :
« la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par la valeur absolue du réel k »

Remarque 2

Le produit d'un scalaire par un vecteur est distributif sur l'addition des vecteurs :

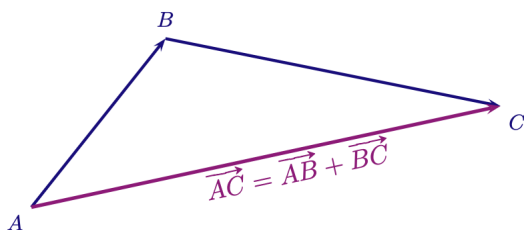


Remarquons que ce résultat est essentiellement équivalent au théorème de Thalès :

**Proposition 2 | Relation de Chasles**

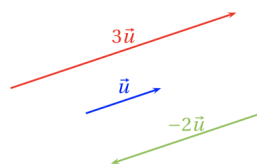
Soient A, B, C trois points du plan ou de l'espace. Alors :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

**Définition 5 | Vecteurs colinéaires**

Deux vecteurs du plan ou de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** si on peut en trouver deux représentants situés **sur une même droite**. Cela se traduit par la condition suivante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} = \lambda \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda \vec{u}.$$



Vecteurs colinéaires

Remarque 3 Le vecteur nul est colinéaire à tous les autres vecteurs.

Deux points distincts A et B du plan ou de l'espace étant donnés, tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

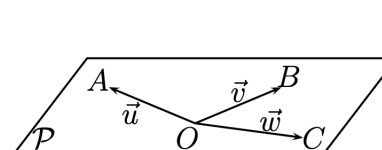
Une définition équivalente est :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires si } \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0}.$$

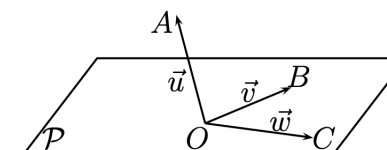
Définition 6 | Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **coplanaires** si on peut trouver trois représentants de ces vecteurs situés **dans un même plan**. Cela se traduit par la condition suivante :

$$\exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w} = \vec{0}.$$



$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires



$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires

1.2. Repérage dans le plan et dans l'espace**Définition 7 | Base et repère du plan ou de l'espace**

- ★ Une **base du plan** est la donnée de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires.
- ★ Une **base de l'espace** est la donnée de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaires.
- ★ Un **repère cartésien** du plan (ou de l'espace) est la donnée d'un point O comme **origine** du repère et d'une **base** de vecteurs du plan (ou de l'espace).

Remarque 4 Une base **orthonormée** du plan est la donnée de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ **orthogonaux** (c'est-à-dire dont des représentants sont portés par des droites perpendiculaires) et de **norme 1**.

On rappelle l'existence et l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base du plan ou de l'espace :

Définition 8 | Repérage dans le plan et dans l'espace

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- ★ Tout **vecteur** $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

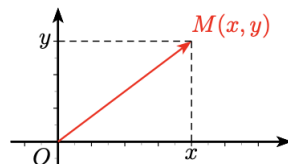
$$\exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2, \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}.$$

Les réels a et b sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ et on note $\vec{u}(a, b)$.

- ★ Tout **point** $M \in \mathcal{P}$ est alors déterminé par le couple de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en posant

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

On note $M(x, y)$: le point M s'identifie à ses **coordonnées** (x, y) .



L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- ★ Tout **vecteur** $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$:

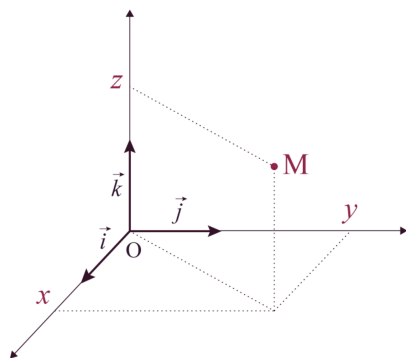
$$\exists!(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Les réels a, b et c sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ et on note $\vec{u}(a, b, c)$.

- ★ Tout **point** $M \in \mathcal{E}$ est déterminé par le triplet de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en posant

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

On note $M(x, y, z)$: le point M s'identifie à ses **coordonnées** (x, y, z) .



Proposition 3 | Lien entre coordonnées de points et d'un vecteur

- ★ Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan $\mathcal{P}$. On a

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}.$$

$(x_B - x_A)$ et $(y_B - y_A)$ sont les **coordonnées** de $\overrightarrow{AB}$.

- ★ Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace $\mathcal{E}$. On a

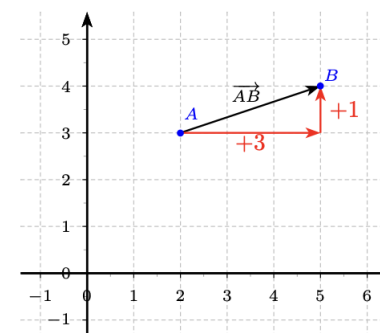
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}.$$

$(x_B - x_A)$, $(y_B - y_A)$ et $(z_B - z_A)$ sont les **coordonnées** de $\overrightarrow{AB}$.

Exemple 1 Soient $A(2, 3)$ et $B(5, 4)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A) = (3; 1)$

Ces coordonnées traduisent la transformation qui permet de passer du point A au point B.



Exemple 2 On peut sommer des vecteurs ou les multiplier par des scalaires en utilisant leurs coordonnées :

Pour $\vec{u}(2, -1)$ et $\vec{v}(-3, 7)$:



1.3. Déterminant et colinéarité dans le plan

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exemple 3

★ $\vec{u}(2, -1)$ et $\vec{v}(-6, 3)$ sont colinéaires car :



★ $\vec{u}(3, -2)$ et $\vec{v}\left(-5, \frac{10}{3}\right)$ sont colinéaires car :



Exemple 4 Ecrire une fonction en langage Python qui à partir des coordonnées de deux vecteurs du plan données en arguments (comme deux listes) renvoie **True** si les deux vecteurs sont colinéaires et **False** sinon.



Définition 9 | Déterminant de deux vecteurs du plan

Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y') \in \mathcal{P}$ deux vecteurs **du plan**. On définit le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Théorème 1 | Colinéarité et déterminant nul dans le plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **du plan**. On a l'équivalence

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Preuve

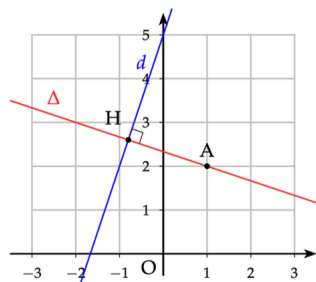


On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

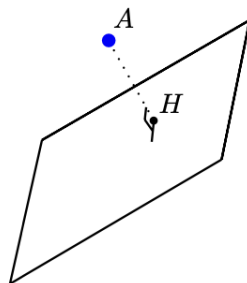
2.1. Projection orthogonale

Définition 10 | Projection orthogonale

- ★ Soit A un point du plan et (d) une droite. Le **projeté orthogonal** de A sur (d) est l'unique point H de (d) tel que les droites (d) et (AH) soient perpendiculaires.



- ★ Soit A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan. Le **projeté orthogonal** de A sur $\mathcal{P}$ est l'unique point H de $\mathcal{P}$ tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan $\mathcal{P}$.



Proposition 4 | Distance minimale

On note $d(M, \mathcal{F})$ la distance minimale entre le point M et un point N de $\mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est une droite du plan ou un plan de l'espace. Si H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$, on a

$$d(M, \mathcal{F}) = \|\overrightarrow{MH}\| = MH.$$

Autrement dit la **distance minimale** entre M et un point de $\mathcal{F}$ est atteinte par le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$.

2.2. Produit scalaire

Définition 11 | Produit scalaire dans le plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A et B les deux points du plan tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm OA \times OH$$

où H est le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) et en comptant + si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ ont le même sens et – s'ils sont de sens contraire.



Remarque 5 En physique, cette quantité correspond au **travail d'une force** c'est-à-dire à l'énergie fournie par une force représentée par le vecteur $\vec{u}$ lorsque son point d'application se déplace en suivant une translation de vecteur $\vec{v}$.

Remarque 6 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace et A et B sont les deux points de l'espace tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, il existe un plan $\mathcal{P}$ contenant les points O, A, B. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ correspond alors au produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ dans le plan $\mathcal{P}$.

Définition 12 | Norme

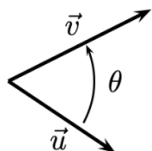
La **norme** (euclidienne) d'un vecteur $\vec{u}$ est définie par $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Remarque 7 Un vecteur $\vec{u}$ est dit **normé** si $||\vec{u}|| = 1$.

Proposition 5 | Formulation du produit scalaire à l'aide d'un cosinus

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A et B sont les deux points de l'espace tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. On note θ l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\theta)$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos \theta$$

Preuve



Proposition 6 | Propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs et tous scalaires, on a

- (i) $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$
- (ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie)
- (iii) $\begin{cases} (\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \mu \vec{u}_2 \cdot \vec{v} \\ \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \mu \vec{u} \cdot \vec{v}_2 \end{cases}$ (bilinearité)
- (iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et si $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ alors $\vec{u} = \vec{0}$. (stricte positivité)

Proposition 7 | Propriétés de la norme

Pour tous vecteurs et tous scalaires, on a

- (i) $||\lambda \vec{u}|| = |\lambda| \times ||\vec{u}||$ (homogénéité de la norme)
 - (ii) $||\vec{u}|| \geq 0$ et si $||\vec{u}|| = 0$ alors $\vec{u} = \vec{0}$ (stricte positivité de la norme)
 - (iii) $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ (inégalité triangulaire)
 - (iv) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)
- avec égalité si et seulement les deux vecteurs sont colinéaires.

Exemple 5 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

- (a) Développer $||\vec{u} + \vec{v}||^2$, $||\vec{u} - \vec{v}||^2$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.
- (b) En déduire les **identités de polarisation** :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) = \frac{1}{4} (||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2).$$



Théorème 2 | Caractérisation de l'orthogonalité de deux vecteurs par le produit scalaire

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Preuve



Théorème 3 | Théorème de Pythagore

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a l'équivalence

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \iff ||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2.$$

Preuve



Proposition 8 | Expression du produit scalaire et de la norme à partir des coordonnées

- Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se calcule comme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

En particulier, $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se calcule comme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

En particulier, $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Remarque 8 La distance entre deux point A et B est donc donnée par

$$d(A, B) = AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

(ou $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ dans l'espace).

Comme pour la colinéarité, un calcul de produit scalaire à partir des coordonnées donne une méthode pour vérifier rapidement que deux vecteurs sont orthogonaux.

Exemple 6 Ecrire une fonction en langage Python qui à partir des coordonnées de deux vecteurs du plan données en arguments renvoie **True** si les deux vecteurs sont orthogonaux et **False** sinon.



3.1. Vecteur directeur, représentation paramétrique et équation cartésienne d'une droite dans le plan

Proposition 9 | Vecteur directeur

$\vec{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite $\mathcal{D}$ si pour tous points $(A, B) \in \mathcal{D}^2$, $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Proposition 10 | Droites parallèles, droites perpendiculaires

- Deux droites sont dites **parallèles** lorsque leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux droites sont dites **perpendiculaires** lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Définition 13 | Représentation paramétrique d'une droite ou équation cartésienne

Une droite $\mathcal{D}$ est entièrement déterminée par la donnée

- ★ d'un point $A \in \mathcal{D}$
- ★ d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$.

Notons $A(x_A, y_A)$ et $\vec{u}(\alpha, \beta)$. Ces informations permettent de donner

- une **représentation paramétrique** de $\mathcal{D}$:

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - x_A = t\alpha \\ y - y_A = t\beta \end{cases}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$$

Ainsi une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\mathcal{D} = \{(x_A + t\alpha, y_A + t\beta); t \in \mathbb{R}\}.$$

- une **équation cartésienne** de $\mathcal{D}$:

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$\iff \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \beta x - \alpha y = \underbrace{\beta x_A - \alpha y_A}_{\text{constante } \gamma}$$

Ainsi une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ est : $\beta x - \alpha y = \gamma$.

Exemple 7 Soient $A(2, 4)$, $B(-1, 3)$, $\vec{u}(2, -1)$ et $\vec{v}(3, -2)$.

- Donner une représentation paramétrique, puis une équation cartésienne de la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$.
- Donner une représentation paramétrique, puis une équation cartésienne de la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{v}$.



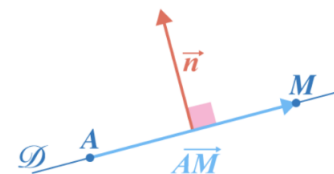
Exemple 8 Soient $A(2, 4)$ et $B(-1, 3)$. Donner une représentation paramétrique, puis une équation cartésienne de la droite (AB) .



3.2. Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite dans le plan

Définition 14 | Vecteur normal à une droite

On dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal** d'une droite $\mathcal{D}$ si pour tout couple de points $(A, M) \in \mathcal{D}^2$, $\vec{n}$ est **orthogonal** à $\overrightarrow{AM}$.



Proposition 11 | Equation cartésienne d'une droite et vecteur normal

Une droite $\mathcal{D}$ est entièrement déterminée par la donnée

- ★ d'un point $A \in \mathcal{D}$
- ★ d'un vecteur normal $\vec{n}$.

Ces informations permettent de donner une **équation cartésienne** de $\mathcal{D}$. Notons $A(x_A, y_A)$ et $\vec{n}(a, b)$, on a :

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\ &\iff ax + by = \underbrace{ax_A + by_A}_{\text{constante } c} \end{aligned}$$

Ainsi une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ est : $ax + by = c$.

Remarque 9 Si $a \neq 0$ on peut modifier une équation cartésienne $ax + by = c$ de $\mathcal{D}$ pour obtenir l'**équation réduite** :

$$y = mx + p$$

où

- ★ m le **coefficient directeur** ou **pente** de la droite,
- ★ p l'**ordonnée à l'origine**.

Remarque 10 Si $ax + by = c$ est une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$:

- Un vecteur normal de $\mathcal{D}$ est $\vec{n}(a, b)$.
- Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(-b, a)$.

Exemple 9 Les droites suivantes sont-elles parallèles? Si non, sont-elles orthogonales? Si elles sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

(a) $\mathcal{D}_1 : 2x - y + 3 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : -6x + 3y - 5 = 0$.

(b) $\mathcal{D}_1 : x + 2y - 5 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : 2x - y + 5 = 0$.

(c) $\mathcal{D}_1 : 2x + y + 3 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : -x + 2y - 7 = 0$.



Exemple 10 Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $2x - y + 1 = 0$ et $M(2; 1)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$. En déduire la distance de M à $\mathcal{D}$.



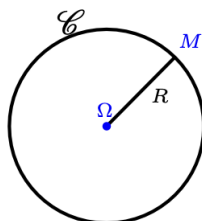
3.3. Équation d'un cercle dans le plan

Un cercle est défini par la donnée de son centre Ω et de son rayon R .

Définition 15 | Equation cartésienne d'un cercle

Le cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon R admet pour équation cartésienne

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$



Preuve
✍

Exemple 12 Justifier que l'équation cartésienne suivante est celle d'un cercle dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon.

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6x + 4y = 5.$$



Exemple 11

- (a) Donner l'équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $\Omega(-1, 2)$ et de rayon 3.
- (b) Donner l'équation du cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $O(0, 0)$ et de rayon 1 (le cercle trigonométrique).



4.

DROITES ET PLANS DANS L'ESPACE

4.1. Vecteur directeur et représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

Définition 16 | Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

Comme c'était déjà le cas dans le plan, une droite $\mathcal{D}$ de l'espace est entièrement déterminée par la donnée

- ★ d'un point $A \in \mathcal{D}$
- ★ d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$.

Notons $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$. Ces informations permettent de donner une **représentation paramétrique** de $\mathcal{D}$:

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - x_A = t\alpha \\ y - y_A = t\beta \\ z - z_A = t\gamma \end{cases}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$

Ainsi une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\mathcal{D} = \{(x_A + t\alpha, y_A + t\beta, z_A + t\gamma); t \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 13 Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $A(-2, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(0, -3, 1)$.

Exemple 14 Soient $A(1, 2, 3)$ et $B(0, -1, 4)$ deux points de l'espace. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .

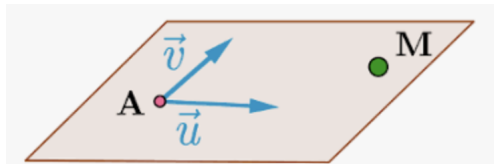


4.2. Base d'un plan et représentation paramétrique d'un plan dans l'espace

Définition 17 | Représentation paramétrique d'un plan dans l'espace

Un plan $\mathcal{P}$ de l'espace est entièrement déterminée par la donnée

- ★ d'un point $A \in \mathcal{P}$
- ★ de **deux** vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **non colinéaires** de $\mathcal{P}$.



Notons $A(x_A, y_A, z_A)$, $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Ces informations permettent de donner une **représentation paramétrique** de $\mathcal{P}$:

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff \exists (t, s)^2 \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}$$

$$\iff \exists (t, s)^2 \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x - x_A = t\alpha + s\alpha' \\ y - y_A = t\beta + s\beta' \\ z - z_A = t\gamma + s\gamma' \end{cases}$$

$$\iff \exists (t, s)^2 \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = x_A + t\alpha + s\alpha' \\ y = y_A + t\beta + s\beta' \\ z = z_A + t\gamma + s\gamma' \end{cases}$$

Ainsi une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ est :

$$\mathcal{P} = \{(x_A + t\alpha + s\alpha', y_A + t\beta + s\beta', z_A + t\gamma + s\gamma') ; (t, s) \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque 11 On dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une **base** du plan $\mathcal{P}$.

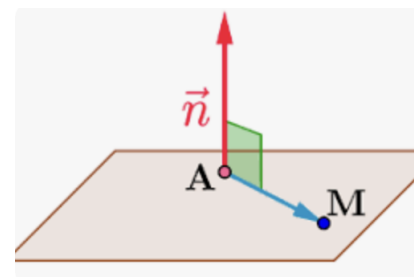
Exemple 15 Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(6, -1, 0)$ et admettant pour base le couple $(\vec{u}(0, 3, -1), \vec{v}(1, 1, 1))$.



4.3. Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan dans l'espace

Définition 18 | Vecteur normal à un plan

On dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal** d'un plan $\mathcal{P}$ si pour tous points $(A, M) \in \mathcal{P}^2$, $\vec{n}$ est **orthogonal** à $\overrightarrow{AM}$.



Proposition 12 | Equation cartésienne d'un plan et vecteur normal

Un plan $\mathcal{P}$ est entièrement déterminé par la donnée

- ★ d'un point $A \in \mathcal{P}$
- ★ d'un vecteur normal $\vec{n}$.

Ces informations permettent de donner une **équation cartésienne** de $\mathcal{P}$. Notons $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{n}(a, b, c)$, on a

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\iff ax + by + cz = \underbrace{ax_A + by_A + cz_A}_{\text{constante } d} \end{aligned}$$

Ainsi une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $ax + by + cz = d$.

Remarque 12 Si $ax + by + cz = d$ est une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$:

- Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\vec{n}(a, b, c)$.
- Un vecteur directeur de $\mathcal{P}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

Exemple 16 Donner une équation cartésienne du plan passant par $A(-2, 1, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(0, -3, 1)$.

Exemple 17 On considère un plan $\mathcal{P}$ dont une représentation cartésienne est donnée ci-dessous :

$$\mathcal{P} : \{(2 - s + t, 1 + s + t, s) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Donner les coordonnées d'un point appartenant au plan $\mathcal{P}$ ainsi que les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
2. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.



Exemple 18 Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - 3z = 6$.

Préciser à partir de cette représentation les coordonnées d'un point appartenant au plan et celles de deux vecteurs formant une base du plan.



5. EXERCICES

Produit scalaire et norme

Exercice 1 | [Solution]

ABCD est un carré de centre H et de côté 4. DCE est un triangle équilatéral tel que le point E ne soit pas à l'intérieur du carré. F est le milieu de [CD]. Représenter la situation par une figure puis calculer les produits scalaires suivants :

- (a) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$
- (b) $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HB}$
- (c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$
- (d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$
- (e) $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{FC}$

Exercice 2 | [Solution] On considère un rectangle ACDE et un point B tel que ABC soit un triangle avec $AB = 2$, $AC = 3$, $AE = 4$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. Représenter la situation par une figure puis calculer les produits scalaires suivants :

- (a) $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC}$
- (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- (c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$
- (d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA}$
- (e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EC}$

Exercice 3 | [Solution] Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs du plan.

1. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u} - \vec{v}||$
2. Dédire de la question précédente une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme ABCD soit un rectangle.

Exercice 4 | [Solution] Soient A et B deux points du plan.

1. Trouver l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
2. A quel résultat de géométrie élémentaire cela correspond-il?

Exercice 5 | [Solution] Un morceau de sucre est poussé par deux fourmis exerçant chacune une force $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, d'intensités respectives 0.08 N et 0.06 N et on sait que $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \frac{\pi}{4}$. Calculer l'intensité (en N) de la force résultante.

Exercice 6 | [Solution] Une personne, assimilée à l'origine d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, est allongée dans un hamac suspendu entre deux arbres. La première corde exerce sur le hamac une tension $\vec{T}_1$, de norme T_1 , qui fait un angle de $\frac{2\pi}{3}$ avec l'horizontale (c'est-à-dire avec $\vec{i}$). La deuxième corde exerce sur le hamac une tension $\vec{T}_2$, de norme T_2 , qui fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'horizontale. La masse de la personne et du hamac vaut 70 kg. On rappelle la valeur de l'accélération de la pesanteur : $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$.

1. La personne et le hamac sont soumis à trois forces $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ et $\vec{P}$ (poids). Représenter la situation par un dessin et exprimer les coordonnées de ces trois vecteurs forces en fonction de T_1 et T_2 .
2. A quelle condition le système est-il à l'équilibre?
3. Déterminer les valeurs de T_1 et T_2 lorsque le système est à l'équilibre.

Droites et cercles dans le plan

Exercice 7 | [Solution] Soient $A(0, -1)$ et $B(-2, 3)$. Déterminer

- (a) une représentation paramétrique de (AB) .
- (b) une équation cartésienne de la droite (AB) .
- (c) une équation du cercle du centre $(0, -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
- (d) les coordonnées du centre de le rayon du cercle défini par $x^2 + y^2 + y = 3$.

Exercice 8 | [Solution] Déterminer l'intersection de $\mathcal{D} : 2x + 5y - 10 = 0$ avec la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $\vec{u}(3, 2)$.

Exercice 9 | Soit $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $D(0, 2)$ et C tel que $ABCD$ soit un rectangle. Soit K un point appartenant au segment $[BC]$. On pose $BK = m \in [0, 2]$.

1. Représenter la situation par une figure.
2. Déterminer les équations cartésiennes des droites (AK) et (BD) .
3. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection T .
4. On note S_m la somme des aires des triangles ADT et BTK . Montrer que

$$S_m = \frac{2m^2 + 8}{m + 2}.$$

5. Déterminer la valeur de m pour laquelle l'aire S_m est minimale.

Exercice 10 | [Solution] On donne les points $A(0; 0)$, $B(1; 0)$ et $C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Soit I le milieu de $[BC]$.

Déterminer les coordonnées de I' , symétrique de I par rapport à $[AC]$.

Exercice 11 | [Solution] On considère les points $A(1; 2)$, $B(2; 3)$ et $C(3; 0)$. Calculer l'aire du triangle ABC .

Exercice 12 | [Solution] Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ dont une équation cartésienne est

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0.$$

1. Justifier que le point $A\left(\frac{19}{5}; \frac{7}{5}\right)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point A .

Exercice 13 | [Solution] On considère l'ensemble $\mathcal{C}_m$ défini par

$$\mathcal{C}_m : x^2 + y^2 - 4x + 2y + m = 0.$$

Déterminer sa forme géométrique en fonction de la valeur de m .

Droites et plans dans l'espace

Exercice 14 | [Solution] Des biologistes ont cartographié une montagne des Alpes et établi un repère local pour étudier le vol d'un vautour. Dans ce repère, la dernière coordonnée représente l'altitude (en mètres). Le vautour décolle du point $A(5000, -3200, 2200)$ et il suit une trajectoire rectiligne pour retrouver ses congénères à l'altitude de 1000 mètres. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ associé à ce déplacement est constant et il a pour coordonnées $(11, 8, -2)$ où chaque coordonnée s'exprime en m.s^{-1} .

1. Déterminer une représentation paramétrique de la trajectoire rectiligne suivie par le vautour.
2. A quelle altitude se trouve le vautour après 4 minutes de vol?
3. Donner les coordonnées du point où se trouvent les congénères que le vautour rejoint.

Exercice 15 | [Solution] Soient $A(0, 3, -1)$, $B(1, 1, 0)$ et $C(1, -1, 2)$. Déterminer

- (a) une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- (b) une représentation paramétrique du plan (ABC) .
- (c) une équation cartésienne du plan (ABC) .

Exercice 16 | [Solution] Soient le plan $\mathcal{P} : x + 2y - 3z + 4 = 0$ et trois points $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(1, 1, 1)$.

1. Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.
2. Montrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathcal{P}'$ dont on précisera une équation cartésienne.

3. Soit $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$. Pour $(x, y, z) \in \mathcal{D}$, exprimer x et y en fonction de z . En déduire que $\mathcal{D}$ est une droite. On précisera un point appartenant à cette droite ainsi qu'un vecteur directeur.

Exercice 17 | [Solution] Calculer la distance de $M(1, 1, 1)$ au plan $\mathcal{P}$ passant par $A(2, 3, 1)$, $B(3, 2, 4)$ et $C(0, 5, -3)$.