Interrogation d'Informatique n°4 A

Mercredi 12/06/2024
Durée : 45 minutes

Consignes

- Les scripts doivent être correctement indentés, en mettant en valeur l'indentation à l'aide d'une barre verticale.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **L'usage de la calculatrice est interdit.**

Nom :		**Prénom :**	

Présentation (écriture, propreté, marqueurs d'indentation du code, ...) : /1

Exercice 1 | Le processus de Galton-Watson (Sujet Agro Véto Modélisation 2024).

Un modèle de croissance probabiliste pour une espèce est le modèle de GALTON-WATSON. On considère une population dont on va décrire l'évolution génération par génération. On appelle Z_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'individus à la génération n et on considère que :

- les générations ne se superposent pas,
- chaque individu a un nombre aléatoire de descendants : le nombre de descendants d'un individu est une variable aléatoire. Les variables aléatoires pour chacun sont indépendantes et de même loi.

On s'intéresse aux conditions sous lesquelles on a extinction ou survie de l'espèce.

- On dit que la lignée est *éteinte à la génération n* si $Z_n = 0$, et on souhaite étudier la suite (u_n) de terme général $u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$.
- On appelle *probabilité d'extinction* la limite (sous réserve d'existence) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0).$$

- Formellement, le modèle est donné par :

$$Z_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

où les variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sont indépendantes et de même loi, $X_{n,i}$ est le nombre de descendants de l'individu numéro i de la génération n.
Par exemple, si $Z_n = 12$ alors $Z_{n+1} = X_{n,1} + \cdots + X_{n,12}$ est la somme du nombre de descendants de chacun des 12 individus de la génération n. On remarquera que comme $Z_0 = 1, Z_1 = X_{0,1}$ qui est le nombre de descendants de l'unique individu de la génération 0.

Dans toute cette partie, on supposera l'importation ci-après réalisée pour les simulations.

```
import random as rd
```

On rappelle alors que l'appel `rd.random()` renvoie un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0, 1[$.

1. /2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut Z_n si toutes les variables $X_{n,i}$ sont des variables aléatoires constantes égales à $q \in \mathbb{N}^*$? En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$.

Supposons que $X_{n,i} = q$ pour tout $(n,i) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} = \sum_{i=1}^{Z_n} q = q Z_n.$$

D'où : $\boxed{Z_n} = Z_0 q^n = \boxed{q^n}$ (Suite géométrique)

La variable aléatoire (Z_n) est donc constante égale à q^n.

Ayant $q^n \neq 0$, $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 0$.

Ainsi : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$. (pas d'extinction de la population)

2. 3 Dans cette question uniquement, la loi de reproduction est la suivante : chaque individu a une probabilité $p \in]0,1]$ de donner deux descendants, par exemple en se divisant, et $1-p$ de disparaitre sans descendant. Donner l'ensemble des valeurs prises par $Z_1 = X_{0,1}$ sa loi de probabilité, puis calculer l'espérance et la variance de Z_1 (exprimer les résultats en fonction de p).

$Z_1(\Omega) = \{0, 2\}$ et la loi de Z_1 est la suivante :

z_i	0	2
$P(Z_1 = z_i)$	$1-p$	p

Alors, $\mathbb{E}[Z_1] = 0 \times (1-p) + 2 \times p = 2p$.

Par le théorème de transfert,
$\mathbb{E}[Z_1^2] = 0^2(1-p) + 2^2 \times p = 4p$.

Par la formule de König-Huygens,
$\mathbb{V}[Z_1] = \mathbb{E}[Z_1^2] - \mathbb{E}[Z_1]^2 = 4p - 4p^2$

3. **[Étude complète dans un cas particulier.]** Dans tout le reste de l'exercice, la loi de reproduction est la suivante : le nombre de descendants de chaque individu (c'est-à-dire $X_{n,i}$) suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

3.1) 2 Rappeler alors la loi de $X_{n,i}$ pour tout $(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ ainsi que sans justification l'espérance et la variance de $X_{n,i}$.

Soit $(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $X_{n,i} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ donc
$X_{n,i}(\Omega) = \{0, 1\}$, $\begin{cases} P(X_{n,i} = 0) = 1-p \\ P(X_{n,i} = 1) = p \end{cases}$

D'après le cours, $\mathbb{E}[X_{n,i}] = p$
$\mathbb{V}[X_{n,i}] = p(1-p)$.

3.2) 2 >_ Écrire une fonction `bernoulli(p)` prenant en argument p et renvoyant une simulation de $X_{n,i}$.

```
def bernoulli(p):
    if rd.random() < p:
        return 1
    else:
        return 0
```

3.3) 3 >_ Compléter le code de la fonction `galton_bern(p, n)` ci-dessous prenant en argument p et un entier $n \in \mathbb{N}$, et renvoyant une simulation de Z_n.

```
def galton_bern(p, n):
    Z = 1
    for _ in range(1, n+1):
        Z_nouveau = 0
        for _ in range(1, Z+1):
            Z_nouveau += bernoulli(p)
        Z = Z_nouveau
    return Z_nouveau
```

3.4) 3 Pour estimer u_n par simulation, on peut simuler un grand nombre de fois (10^3 fois par exemple) Z_n à l'aide de la fonction précédente, et renvoyer la fréquence de fois où cette simulation valait zéro. Écrire une fonction `galton_bern_extinct(p, n)` qui renvoie une valeur approchée de u_n selon ce principe.

```
def galton_bern_extinct(p,n):
    compteur = 0
    for i in range(10**3):
        if galton_bern(p,n)==0:
            compteur += 1
    return compteur/(10**3)
```

3.5) 1 On suppose les appels suivants.

```
>>> galton_bern_extinct(0.9, 10)
0.669
>>> galton_bern_extinct(0.9, 100)
1.0
>>> galton_bern_extinct(0.5, 10)
1.0
>>> galton_bern_extinct(0.5, 100)
1.0
>>> galton_bern_extinct(0.1, 10)
1.0
>>> galton_bern_extinct(0.1, 100)
1.0
```

Que peut-on raisonnablement conjecturer? *Dans la suite, on souhaite établir ce résultat par le calcul.*

On peut conjecturer que, quelle que soit la valeur de $p \in]0,1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ donc que la probabilité d'extinction vaut 1.

3.6) 2 Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = 0$ ou $Z_n = 1$ et que : $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p^n$. *(On pourra penser à appliquer la formule des probabilités totales lors de l'hérédité.)*

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$\mathcal{H}(n)$: " $Z_n \in \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p^n$ ".

<u>Initialisation</u>. $Z_1 = X_{0,1} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, donc $Z_1(\Omega) = \{0,1\}$ avec $\mathbb{P}(Z_1 = 1) = p^1$, ainsi, $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u>. Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$, de sorte que $Z_n \in \{0,1\}$ avec $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p^n$. Alors, s'il y a 0 ou 1 individu à la génération n, soit la population s'éteint, soit l'unique individu engendre à son tour 0 ou 1 individu et il y a 0 ou 1 individu à la génération $n+1$, soit : $Z_{n+1} \in \{0,1\}$.

De plus, d'après la formule des probabilités totales associée au s.c.e $(\{Z_n = 0\}, \{Z_n = 1\})$:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = \underbrace{\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1 \mid Z_n = 0)}_{\text{impossible}}\mathbb{P}(Z_n = 0) + \mathbb{P}(Z_{n+1} = 1 \mid Z_n = 1)\mathbb{P}(Z_n = 1)$$

$$= 0 \times (1 - p^n) + p \times p^n$$

$$= p^{n+1}.$$

Donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat par le principe de récurrence.

3.7) 1 En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$. Interpréter le résultat.

Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(Z_n = 1)$$
$$= 1 - p^n.$$

Or, $|p| < 1$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} p^n = 0$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \boxed{1}$

La population va presque sûrement s'éteindre !