TP : Calculs approchés d'intégrales

Le but de ce TP est d'implémenter des méthodes de calculs approchés d'intégrales. On effectuera les tests pour calculer les deux intégrales suivantes, dont on connait les valeurs exactes (cf Préliminaires) :

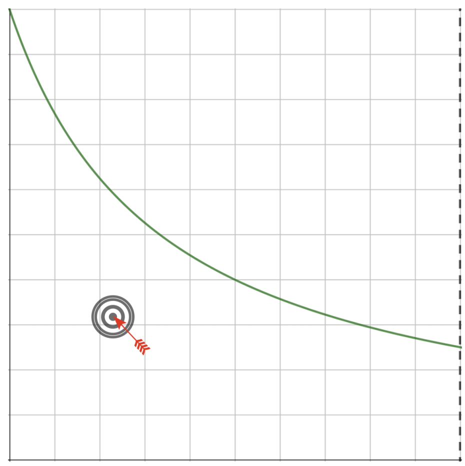
$$I = \int_0^1 \frac{1}{3t+1}\, dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^2 t^2 + 1\, dt.$$

Mise en place

1. Implémenter en langage Python les fonctions $f_1 : t \mapsto \dfrac{1}{3t+1}$ et $f_2 : t \mapsto t^2 + 1$.

Méthode de Monte-Carlo (approche probabiliste)

On tire une fléchette sur le dessin ci-contre (il s'agit de la courbe représentant $f_1 : [0;1] \to [0;1]$). On suppose que la flèchette atteint nécessairement le dessin.



2. Quelle est la probabilité que la flèchette atteigne la zone en-dessous de la courbe ?

   ....

3. On tire N fléchettes et on note $N_{dessous}$ le nombre de fléchettes qui atteignent la zone en-dessous de la courbe. Proposer une valeur approchée de I en unités d'aires.

$$I \simeq \cdots\cdots\cdots$$

4. Comment peut-on simuler ce tir de fléchette en langage `Python` ?

   ....

5. Écrire une fonction `monteCarloVisuel(f,N)` qui affiche le graphe d'une fonction $f : [0;1] \to [0;1]$ dans le carré $[0;1] \times [0;1]$ ainsi que N points représentant N tirs de fléchettes aléatoires dans ce carré.

6. Tester cette fonction pour la fonction f_1 et 100 fléchettes puis 1000 fléchettes.

7. Écrire une fonction `monteCarlo(f,N)` qui compte cette fois le nombre de points au-dessus de la courbe représentant f et le nombre de points en-dessous de la courbe représentant f et qui renvoie une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ par la méthode de Monte Carlo.

8. Tester :
   - `monteCarlo(f1,100)` = ...

   - `monteCarlo(f1,1000)` = ...

9. On souhaite utiliser la même méthode pour calculer une valeur approchée de J. Dessiner l'allure de la courbe représentant la fonction $g : t \mapsto t^2 + 1$ sur le segment $[0, 2]$. Choisir alors un rectangle $[a; b] \times [0; M]$ correspondant à une zone de tir.

$$a = \cdots\cdots\cdots \ , \quad b = \cdots\cdots\cdots \ , \quad M = \cdots\cdots\cdots$$

10. Soit $f : [a, b] \to [0, M]$. On tire dans le rectangle $[a; b] \times [0; M]$ N fléchettes et on note $N_{dessous}$ le nombre de fléchettes qui atteignent la zone en-dessous de la courbe représentant f. Proposer une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ en unités d'aire.

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \simeq \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

    Par exemple,

$$J \simeq \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

11. Comment peut-on cette fois simuler le tir de fléchette ?

    ....

12. Écrire une fonction `monteCarlo2(a,b,M,f,N)` qui renvoie une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$, lorsque $0 \leq f \leq M$, par la méthode de Monte Carlo.

13. Tester cette fonction pour calculer une valeur approchée de J.

    ....

Méthode des rectangles

14. Écrire une fonction `valApprocheeRect(f,n)` qui envoie deux valeurs approchées de $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$: l'une calculée avec la méthode des rectangles à gauche (G_n), l'autre avec celle des rectangles à droite (D_n).

15. On a montré dans les préliminaires que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n \leq I \leq G_n$. Donner un encadrement de I en prenant $n = 1000$.

 ....

16. Écrire une fonction `valApprocheeRect2(a,b,f,n)` qui envoie deux valeurs approchées de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$: l'une calculée avec la méthode des rectangles à gauche (G_n), l'autre avec celle des rectangles à droite (D_n).

17. On admet qu'on peut démontrer de manière similaire à ce qui a été fait dans les préliminaires que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n \leq J \leq D_n$. Donner un encadrement de J en prenant $n = 1000$.

 ....

Méthode des trapèzes

18. Écrire une fonction `valApprocheeTrap(f,n)` qui envoie une valeur approchée de $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ par la méthode des trapèzes.

19. Pour $n = 1000$, on trouve
$$I \simeq \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

20. Écrire une fonction `valApprocheeTrap2(a,b,f,n)` qui envoie une valeur approchée de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la méthode des trapèzes.

21. Pour $n = 1000$, on trouve
$$J \simeq \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Bilan

22. On souhaite comparer les différentes méthodes de calcul approché de $I = \int_0^1 f_1(t)\ \mathrm{d}t$ où on rappelle que

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{3x+1}.$$

On rappelle qu'on a vu en préliminaires que $I = \dots\dots\dots$

Compléter le tableau suivant :

	Valeur approchée par la méthode des rectangles à gauche	Valeur approchée par la méthode des rectangles à droite	Valeur approchée par la méthode des trapèzes	Valeur approchée par la méthode de Monte Carlo
$n = 100$				
$n = 1000$				
$n = 10000$				

23. On souhaite comparer les différentes méthodes de calcul approché de $K = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ pour cette fois

$$f : x \mapsto e^{-t^2}.$$

Remarquons qu'on ne connait cette fois pas la valeur exacte de K.
Compléter le tableau suivant :

	Valeur approchée par la méthode des rectangles à gauche	Valeur approchée par la méthode des rectangles à droite	Valeur approchée par la méthode des trapèzes	Valeur approchée par la méthode de Monte Carlo
$n = 100$				
$n = 1000$				
$n = 10000$				