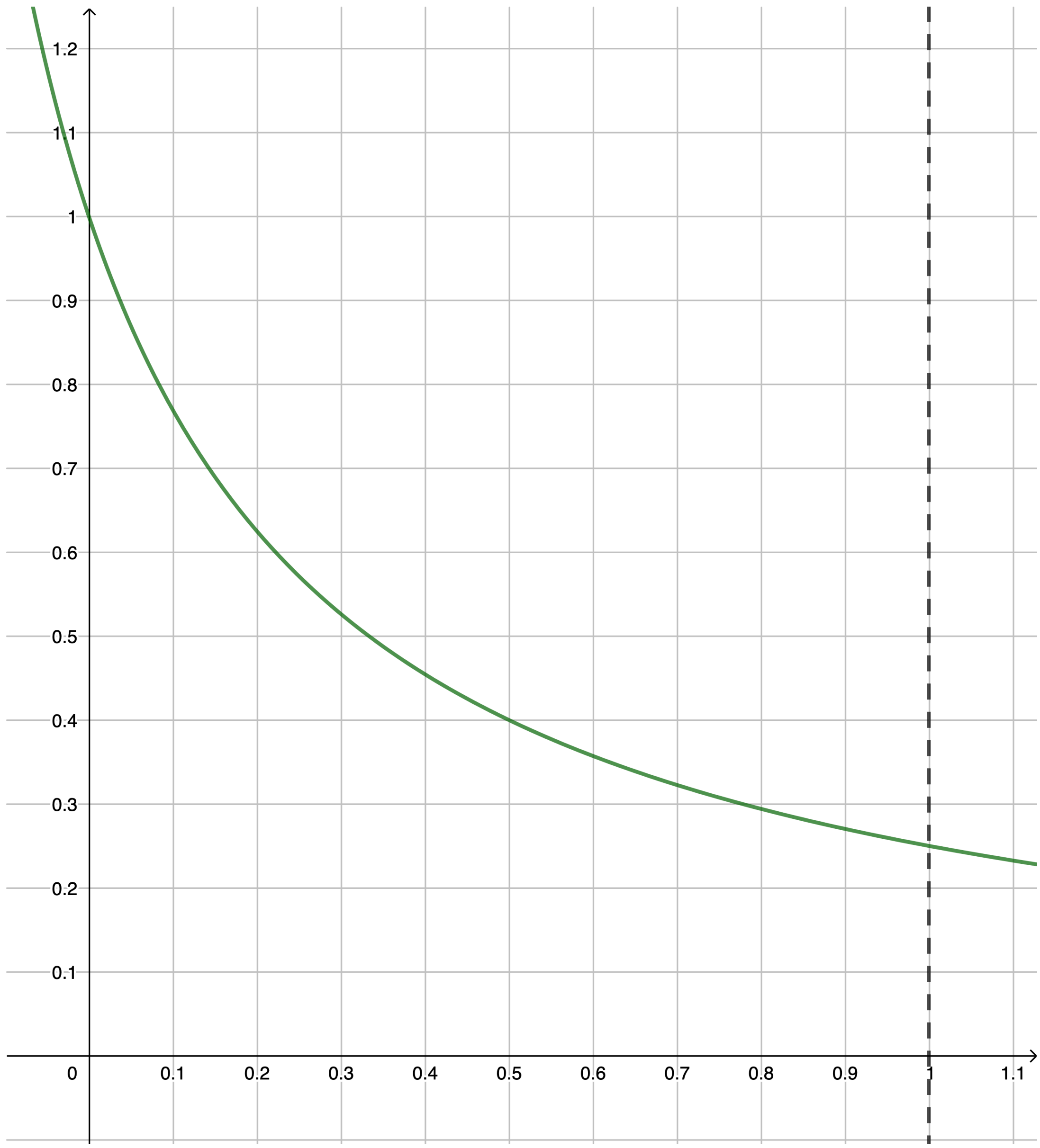
TP : Calculs approchés d'intégrales (préliminaires)

Préliminaires

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3t+1}\,\mathrm{d}t =$ ....

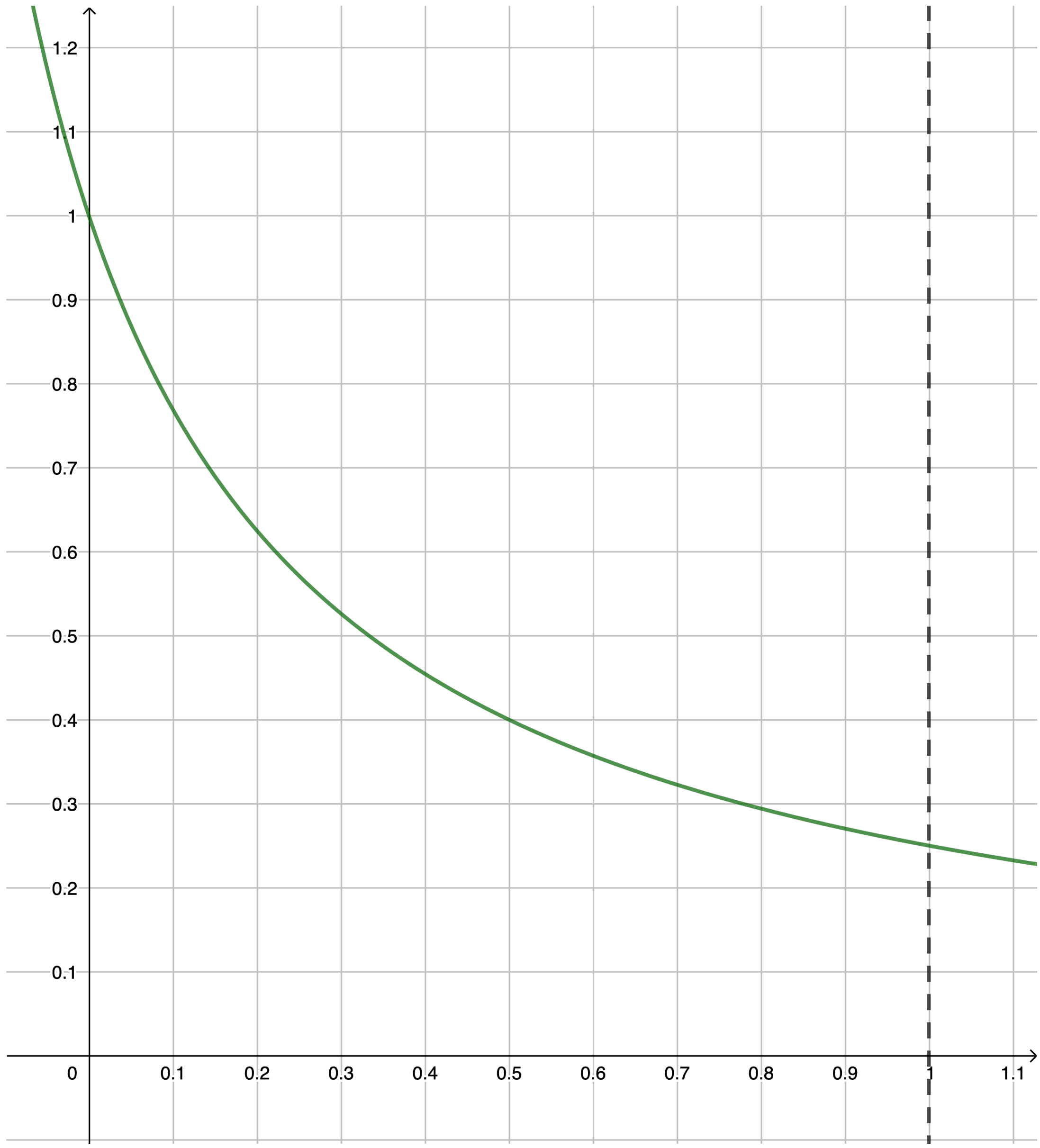
2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^2 t^2+1\,\mathrm{d}t =$ ....

3. Le graphe ci-dessous représente la fonction f_1 sur $[0;1]$.
   Tracer le rectangle passant par les points $A_0(0;0)$, $B_0(0;f(0))$ et $A_1(0,1;0)$. Tracer ensuite le rectangle passant par les point $A_1(0,1;0)$, $B_1(0,1;f(0,1))$ et $A_2(0,2;0)$.
   Poursuivre ce procédé (10 rectangles à tracer).



On observe alors que la somme des aires des 10 rectangles tracés est une estimation de I. En calculant $G_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, on obtient une valeur approchée de I par la **méthode des rectangles à gauche**.

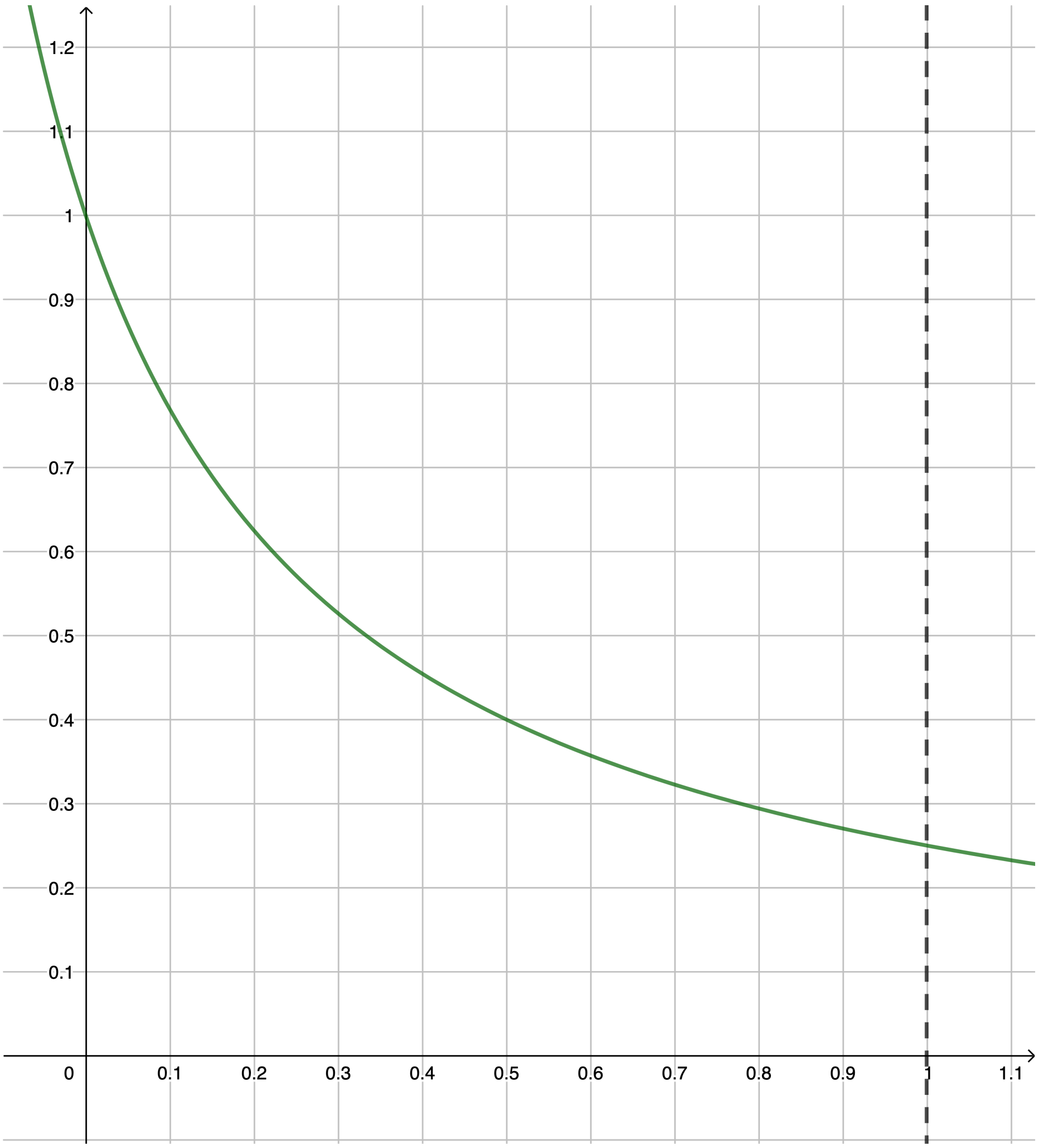
4. Le graphe ci-dessous représente la fonction f_1 sur $[0;1]$.
   Tracer le rectangle passant par les points $A_0(0;0)$, $B_1(0,1;f(0,1))$ et $A_1(0,1;0)$.
   Tracer ensuite le rectangle passant par les points $A_1(0,1;0,1)$, $B_2(0,2;f(0,2))$ et $A_2(0,2;0)$.
   Poursuivre ce procédé (10 rectangles à tracer).



   On observe alors que la somme des aires des 10 rectangles tracés est une estimation de I. En calculant $D_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, on obtient une valeur approchée de I par la **méthode des rectangles à droite**.

5. Justifier mathématiquement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n \leq I \leq G_n$.

6. Le graphe ci-dessous représente la fonction f_1 sur $[0;1]$.
Tracer le trapèze de première base le segment $[A_0B_0]$ où $A_0(0;0)$ et $B_0(0;f(0))$ et de deuxième base le segment $[A_1B_1]$ où $A_1(0,1;0)$ et $B_1(0,1;f(0,1))$.
Tracer ensuite le trapèze de première base le segment $[A_1B_1]$ et de deuxième base le segment $[A_2B_2]$ où $A_2(0,2;0)$ et $B_2(0,2;f(0,2))$.
Poursuivre ce procédé (10 trapèzes à tracer).



7. Proposer une façon de calculer $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(t)\ \mathrm{d}t$.

On dit qu'on approche I par la **méthode des trapèzes**.