Devoir maison n°12
à rendre le Jeudi 06/06/2024

Consignes

- Les devoirs maison sont facultatifs. Pour autant, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.**

Exercice 1 | [Solution] On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants 0, 1, 2, 3... Les fonctionnement respectifs de ces deux ampoules sont supposées indépendants. A l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé.
A chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\frac{1}{2}$ de rester allumée et $\frac{1}{2}$ de griller.
On note, pour tout entier naturel n, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $X_n(\Omega)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $\mathbb{E}(X_0) = 2$.
3. Déterminer la variance de X_0.
4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$

5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et sans justification les valeurs des probabilités conditionnelles suivantes :

5.1) $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0)$.
5.2) $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)$.
5.3) $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)$.
5.4) $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$.
5.5) $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2)$.
5.6) $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1)$.
5.7) $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = 2)$.
7. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

On cherche dans la suite à déterminer l'espérance et la variance de tous les X_n sans chercher leur loi. On introduit les éléments de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ suivants :
$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $\mathbb{E}(X_n) = L_1 U_n$.
9. Calculer $L_1 A$ et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1.
10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_n).$$

11. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
12. Exprimer, pout tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de L_2 et U_n.
13. Calculer $L_2 A$ et montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera, tels que $L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2$.
14. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

15.1) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
15.2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \mathbb{E}(X_n^2) - u_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.
15.3) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de n.

16. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $\mathbb{V}(X_n)$ en fonction de n.

CORRECTION

Solution (exercice 1) Énoncé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

2. A l'instant initial, les deux ampoules sont allumées donc $\mathbb{P}(X_0 = 2) = 1$, $\mathbb{P}(X_0 = 0) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 0$. On a donc immédiatement $\mathbb{E}(X_0) = 2$.

3. Calculons : $\mathbb{V}(X_0) = \mathbb{E}(X_0^2) - \mathbb{E}(X_0)^2 = 2^2 \times 1 - 2^2 = 0$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant que $X_n = 2$ i.e. que les deux ampoules sont allumées à l'instant n, la probabilité qu'elles soient allumées à l'instant suivant (les ampoules étant indépendantes l'une de l'autre) vaut $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Ensuite, sachant qu'elles sont allumées à l'instant n, la probabilité que l'une soit allumée et l'autre grillée à l'instant suivant vaut $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

5.1) $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$.

5.2) $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = 0$.

5.3) $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$.

5.4) $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}$.

5.5) $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$.

5.6) $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 0$.

5.7) $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 1$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\{(X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2)\}$ est un système complet d'événements. Grâce à la formule des probabilités totales appliquée au calcul de la probabilité de l'événement $(X_{n+1} = 1)$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\\
&= \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 1)\\
&+ \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 2)\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 2).
\end{aligned}$$

7. On montre de même que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = 0).$$

et

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = 2).$$

On a donc bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

en traduisant le système composé des trois égalités trouvées aux questions 5. et 6. matriciellement.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = 0 \times \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1) + 2\mathbb{P}(X_n = 2) = L_1 U_n$.

9. On a

$$L_1 A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} L_1.$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = L_1 U_{n+1} = L_1 A U_n = \frac{1}{2} L_1 U_n = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_n)$.

11. La relation trouvée à la question précédente garantit que la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On déduit immédiatement que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathbb{E}(X_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

12. Pout tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n^2) = L_2 U_n$.

13. On a $L_2 A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ donc

$$L_2 A = \frac{1}{4} L_1 + \frac{1}{4} L_2.$$

14. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = L_2 U_{n+1} = L_2 A U_n = \frac{1}{4} L_1 U_n + \frac{1}{4} L_2 U_n = \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_n^2).$$

En utilisant le résultat de la question 11., on en déduit que

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

15.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-1}$ donc on a bien $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

15.2) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \mathbb{E}(X_n^2) - u_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \mathbb{E}(X_{n+1}^2) - u_{n+1} = \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{4}(\mathbb{E}(X_n^2) - u_n) = \frac{1}{4}v_n$$

et donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

15.3) On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n v_0 = \left(\frac{1}{4}\right)^n (\mathbb{E}(X_0^2) - u_0) = \frac{1}{(2^2)^n}(4-2) = \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(X_n^2) = v_n + u_n = \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

16. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 &= \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{2n-2}} = \frac{1}{2^{2n-1}}(1-2) + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{2n-1}}.\end{aligned}$$