Devoir maison n°13
à rendre le Jeudi 20/06/2024

Consignes

- Les devoirs maison sont facultatifs. Pour autant, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.**

Exercice 1 | Intégrale de Wallis (écrit G2E 2024) Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$

1. **1.1)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est bien définie.

1.2) Déterminer I_0 et I_1.

2. **2.1)** Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2.2) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n > 0$.

2.3) Que peut-on alors dire de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. **3.1)** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+2)\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\,\mathrm{I}_n$.
(*Indication : on pourra se servir d'une formule trigonométrique bien connue.*)

4. **4.1)** En utilisant le fait que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n} \leqslant 1.$$

4.2) En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. **5.1)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)\,\mathrm{I}_n\,\mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

5.2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_n = n\mathrm{I}_n^2$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_n = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n+1}}\dfrac{\pi}{2}$.

b) Justifier que la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n$.

5.3) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\mathrm{I}_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

5.4) Donner un équivalent simple de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

6. **6.1)** Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

6.2) En déduire l'expression de I_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.