

Corrigé des exercices du livret de révisions

1.a FRACTIONS

1.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{30}{60} + \frac{40}{60} + \frac{45}{60} + \frac{48}{60} = \frac{163}{60}$$

La fraction $\frac{163}{60}$ est *irréductible*, elle ne peut pas être simplifiée. Lorsque le résultat d'un calcul est un nombre rationnel, il faut toujours l'exprimer sous forme irréductible. Dans notre petit calcul, pourquoi 60 ? Et pourquoi le résultat est-il irréductible ? Chaque réponse amène de nouvelles questions.

2.

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{144}$$

3.

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{xyz}{yz + xz + xy}$$

Pouvez-vous généraliser ce résultat avec plus de trois variables ?

4.

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}$$

Même question que dans le calcul précédent.

5.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{x+1}} \\ &= 1 + \frac{x+1}{2x+1} \\ &= \frac{3x+2}{2x+1} \end{aligned}$$

Ici encore, pouvez-vous généraliser ? Les *nombre de Fibonacci* ne sont pas très loin . .

1.b PUISSANCES ET RACINES CARRÉES

1.

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{2})^3 - 5\sqrt{2} &= 1 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^3 - 5\sqrt{2} \\ &= 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \\ &= 7\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{4 + 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} &= \frac{(4 + 2\sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{4 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}^2}{1^2 - \sqrt{3}^2} \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{-2} \\ &= 1 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

On a réussi à éliminer les racines carrées en multipliant numérateur et dénominateur de la fraction par la *quantité conjuguée* du dénominateur.

3. Une identité remarquable bien connue donne : $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ donc

$$\begin{aligned}\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \sqrt{x} - \sqrt{y}\end{aligned}$$

4. Toujours en utilisant les identités remarquables,

$$\begin{aligned}\sqrt{x + 2\sqrt{x} + 1}\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} &= \sqrt{(\sqrt{x} + 1)^2}\sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2} \\ &= |\sqrt{x} + 1||\sqrt{x} - 1| \\ &= |(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)| \\ &= |x - 1|\end{aligned}$$

Clairement, les *identités remarquables* (ici, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$) sont nos amies.

1.c UN PETIT PEU DE LOGARITHME ET D'EXPONENTIELLE

1.

$$e^{-2\ln(3)} = e^{-\ln(3^2)} = \frac{1}{e^{\ln(9)}} = \frac{1}{9}$$

2.

$$e^{-\ln(5) + 2\ln(3)} = e^{\ln\left(\frac{3^2}{5}\right)} = \frac{9}{5}$$

3.

$$e^{2x} \times e^{1-2x} = e^{x+1-2x} = e^1 = e$$

4.

$$\frac{e^{2x+4}}{e^{x+1}} = e^{(2x+4)-(x+1)} = e^{x+3}$$

5.

$$\begin{aligned} \ln \left(\left(\frac{a}{b} \right)^3 \right) - \ln (\sqrt{ab}) &= 3 \ln \left(\frac{a}{b} \right) - \frac{1}{2} \ln(ab) \\ &= 3 \ln(a) - 3 \ln(b) - \frac{1}{2} \ln(a) - \frac{1}{2} \ln(b) \\ &= \frac{5}{2} \ln(a) - \frac{7}{2} \ln(b) \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} 4 \ln \left(\frac{a}{b} \right) - 3 \ln(a) + 5 \ln(b) &= 4 \ln(a) - 4 \ln(b) - 3 \ln(a) + 5 \ln(b) \\ &= \ln(a) + \ln(b) \\ &= \ln(ab) \end{aligned}$$

2.b DÉRIVATION

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 3$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ici à dériver un *quotient*.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ici à dériver une *composée*.

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

4. Soit $x \in]-1, 1[$. On a ici à dériver une *composée*.

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

On a ici admis que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle y est dérivable. Pouvez-vous le prouver ?

2.c INTÉGRATION

1.

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \frac{x^2 - x - 1}{x^3} dx &= \int_1^2 \frac{x^2}{x^3} dx - \int_1^2 \frac{x}{x^3} dx - \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx \\
 &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx - \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx \\
 &= [\ln(x)]_1^2 + \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 + \left[\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 \\
 &= \ln(2) + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \\
 &= \ln(2) - \frac{7}{8}
 \end{aligned}$$

2. On intègre par parties en posant $\forall x \in [1; 2], u'(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$, de sorte que $\forall x \in [1; 2], u(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 x \ln(x) dx &= \int_1^2 u'(x)v(x) dx \\
 &= [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x)\right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx \\
 &= 2\ln(2) - \frac{1}{4} [x^2]_1^2 \\
 &= 2\ln(2) - \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

3. Posons $\forall x \in [0; 1], u(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$. On a $\forall x \in [0; 1], u'(x) = xe^{x^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 xe^{x^2} dx &= \int_0^1 u'(x) dx \\
 &= [u(x)]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

4. Posons $\forall x \in \mathbb{R}, u' = \sin(x)$ et $v(x) = x$, de sorte que $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = -\cos(x)$ et $v'(x) = 1$. A l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x) dx \\
 &= [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx \\
 &= [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

5. Posons $u = \cos(x)$. On a

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{4}], \quad \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2} = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2} dx &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u'(x)}{(u(x))^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{u(x)} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} - \frac{1}{\cos(0)} \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

3. DES RÉOLUTIONS D'ÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

1. (a) Considérons l'équation

$$(E) \quad |2x - 1| = 3$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. x est solution de (E) si et seulement si $2x - 1 = 3$ ou $2x - 1 = -3$, c'est à dire $x = 2$ ou $x = -1$.

(b) Considérons l'équation

$$(E) \quad \sqrt{x+1} = x$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. x est solution de (E) si et seulement si $x \geq 0$ et $\sqrt{x+1}^2 = x^2$, c'est à dire $x \geq 0$ et

$$(E') \quad x^2 - x - 1 = 0$$

L'équation (E') est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 5$. Les solutions de (E') sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Seule la première solution de (E') est positive. Ainsi, x est solution de (E) si et seulement si $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) Considérons l'équation

$$(E) \quad e^{3x+4} = 2$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. x est solution de (E) si et seulement si $3x + 4 = \ln(2)$, c'est à dire

$$x = \frac{\ln(2) - 4}{3}$$

(d) Considérons l'équation

$$(E) \quad \ln(2x+1) + \ln(-x+1) = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour pouvoir considérer $\ln(2x+1)$ et $\ln(-x+1)$ il faut avant tout que $2x+1 > 0$ et $-x+1 > 0$, c'est à dire $x > -\frac{1}{2}$ et $x < 1$. Nous supposons donc que $x \in I$, où $I =]-\frac{1}{2}; 1[$. On a alors

$$\ln(2x+1) + \ln(-x+1) = \ln((2x+1)(-x+1))$$

Ainsi, x est solution de (E) si et seulement si $x \in I$ et

$$(2x + 1)(-x + 1) = 1$$

ou encore, en développant,

$$-2x^2 + x = 0$$

Remarquons que

$$-2x^2 + x = x(1 - 2x)$$

Ainsi, x est solution de (E) si et seulement si $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$. Remarquons que ces deux nombres réels appartiennent bien à l'intervalle I .

2. (a) Considérons l'équation

$$(E) \quad 4x^2 - 49 = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. x est solution de (E) si et seulement si

$$x^2 = \frac{49}{4}$$

c'est à dire $x = \frac{7}{2}$ ou $x = -\frac{7}{2}$.

(b) Considérons l'équation

$$(E) \quad x + \frac{1}{x} = 3$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. x est solution de (E) si et seulement si (en multipliant par x)

$$x^2 + 1 = 3x$$

ou encore

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

On a là une équation du second degré de discriminant $\Delta = 5$, dont les solutions sont $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(c) Considérons l'équation

$$(E) \quad 6e^{2x} - 5e^x + 1 = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $t = e^x$ (ou, ce qui revient au même, $x = \ln(t)$). x est solution de (E) si et seulement si

$$6t^2 - 5t + 1 = 0$$

On a là une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1$, dont les solutions sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. Les solutions de l'équation (E) sont donc les réels $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$, que l'on peut écrire plus simplement $-\ln(2)$ et $-\ln(3)$.

(d) Considérons l'équation

$$(E) \ln(1 + e^{-x}) = x$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. x est solution de (E) si et seulement si, en passant à l'exponentielle,

$$1 + e^{-x} = e^x$$

En multipliant par e^x , cette égalité est équivalente à

$$e^x + 1 = e^{2x}$$

ou encore, en posant comme dans l'exercice précédent $t = e^x$,

$$t^2 - t - 1 = 0$$

On a là une équation du second degré de discriminant $\Delta = 5$, dont les solutions sont $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Seule la solution t_1 est positive. On a donc $\ln(1 + e^{-x}) = x$ si et seulement si

$$x = \ln(t_1) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

3. (a) 1 est solution évidente de (E) .

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. En développant, on obtient

$$(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

Une condition suffisante sur les réels a, b, c pour que $(x-1)(ax^2 + bx + c) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$ est donc

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b-a &= -8 \\ c-b &= 17 \\ -c &= -10 \end{cases}$$

Facilement, les réels $a = 1$, $b = -7$ et $c = 10$ conviennent.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel x est solution de (E) si et seulement si

$$(x-1)(x^2 - 7x + 10) = 0$$

c'est à dire $x = 1$ ou

$$(E') \quad x^2 - 7x + 10 = 0$$

L'équation (E') est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 9$. Elle possède deux solutions, qui sont 2 et 5. Finalement, les solutions de (E) sont 1, 2 et 5.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(rx) \\ f'(x) &= r \exp(rx) \\ f''(x) &= r^2 \exp(rx) \\ f'''(x) &= r^3 \exp(rx) \end{aligned}$$

De là,

$$f'''(x) - 8f''(x) + 17f'(x) - 10f(x) = (r^3 - 8r^2 + 17r - 10) \exp(rx)$$

Comme r est solution de (E) , $r^3 - 8r^2 + 17r - 10 = 0$, et donc

$$f'''(x) - 8f''(x) + 17f'(x) - 10f(x) = 0$$

4. LES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

1. (a)

$$\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

(b)

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(c)

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(d)

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x) \text{ et } \sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) $2\sin(x) - 1 = 0$ si et seulement si $\sin(x) = \frac{1}{2}$, c'est à dire si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

(b) $\sin(2x + \pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si et seulement si $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est à dire si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ce qui revient à

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + k\pi$$

(c) $4(\cos(x))^2 - 2 = 0$ si et seulement si $(\cos(x))^2 = \frac{1}{2}$, c'est à dire

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La première possibilité équivaut à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

La deuxième possibilité équivaut à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

(d) On a

$$\begin{aligned} -2(\sin(x))^2 + 3\cos(x) + 3 &= -2(1 - (\cos(x))^2) + 3\cos(x) + 3 \\ &= 2(\cos(x))^2 + 3\cos(x) + 1 \end{aligned}$$

Posons $t = \cos(x)$. Le réel x est solution de l'équation si et seulement si

$$2t^2 + 3t + 1 = 0$$

Ceci est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 1$. Cette équation possède deux solutions, qui sont $-\frac{1}{2}$ et -1 . Ainsi, x est solution si et seulement si

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x) = -1$$

La première possibilité équivaut à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

La deuxième possibilité équivaut à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = k\pi$$

5. DES ÉTUDES DE SUITES

SUITES ARITHMÉTIQUES

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 1 - (2n-1) = 2$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique, de raison 2.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 1 - (n^2 - 1) = 2n + 1$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique, puisque $u_{n+1} - u_n$ dépend de n .

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 5 - 2(n+1) - (5 - 2n) = -2$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique, de raison -2 .

(d) Par définition, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique, de raison 1.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 2n$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique, puisque $u_{n+1} - u_n$ dépend de n .

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 u_0 + \dots + u_n &= (2 \times 0 - 1) + \dots + (2 \times n - 1) \\
 &= 2 \times (0 + \dots + n) - (1 + \dots + 1) \\
 &= 2 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
 &= n(n+1) - (n+1) \\
 &= (n-1)(n+1) \\
 &= n^2 - 1
 \end{aligned}$$

(b) Cette suite n'est pas arithmétique.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 u_0 + \dots + u_n &= (5 - 2 \times 0) + \dots + (5 - 2 \times n) \\
 &= (5 + \dots + 5) - 2 \times (0 + \dots + n) \\
 &= 5(n+1) - 2 \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= 5(n+1) - n(n+1) \\
 &= (5-n)(n+1)
 \end{aligned}$$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + n \times 2 = 2n + 1$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
 u_0 + \dots + u_n &= (2 \times 0 + 1) + \dots + (2 \times n + 1) \\
 &= 2 \times (0 + \dots + n) + (1 + \dots + 1) \\
 &= 2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
 &= n(n+1) + (n+1) \\
 &= (n+1)^2
 \end{aligned}$$

(e) Cette suite n'est pas arithmétique.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
 u_n &= u_{n-1} + 2(n-1) \\
 &= u_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) \\
 &= u_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) \\
 &= \dots \\
 &= u_0 + 2 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times (n-1) \\
 &= 1 + 2 \times (0 + 1 + \dots + (n-1)) \\
 &= 1 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \\
 &= 1 + n(n-1) \\
 &= n^2 - n + 1
 \end{aligned}$$

Pour une preuve rigoureuse, il conviendrait de faire une *réurrence* sur n .

SUITES GÉOMÉTRIQUES

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $a = \frac{2}{3}a + 1$ si et seulement si $a = 3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\&= \frac{2}{3}u_n - 2 \\&= \frac{2}{3}(u_n - 3) \\&= \frac{2}{3}v_n\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

3. On a $v_0 = u_0 - 3 = 2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 3^n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n + 3 = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$$

5. Comme $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, v_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. De là, u_n tend vers 3 lorsque n tend vers l'infini.